

BARRAS ESTRUTURAIS DE CONTRAVENTAMENTO**Fábio Armando Botelho Codovil**

Universidade Estadual de Maringá – Departamento de Engenharia Civil

Ismael Wilson Cadamuro Junior

Universidade Estadual de Maringá – Departamento de Engenharia Civil

RESUMO

Este artigo tem por objetivo discutir o contraventamento de peças estruturais comprimidas, considerando dois aspectos que merecem destaque no tratamento das barras de contraventamento: as forças que atuam nestas barras e as suas respectivas rigidezes. O presente trabalho aborda o assunto a partir dos teoremas relativos à energia de deformação, com aplicação do princípio do mínimo da energia potencial total em barras comprimidas nas quais os contraventamentos funcionam como molas elásticas. As expressões obtidas são comparadas com as prescritas por algumas normas de projetos de estruturas.

Palavras-chave: contraventamento, barras de contraventamento, peças comprimidas.

1. INTRODUÇÃO

A abordagem das normas de projetos de estruturas tem fundamentos nos teoremas de energia, mais precisamente no princípio do mínimo da energia potencial total, também chamado de princípio do valor estacionário do potencial total do sistema. Este princípio é aplicado em barras comprimidas nas quais os contraventamentos funcionam como molas elásticas.

Entende-se como potencial total a soma do potencial da força aplicada com a energia armazenada no sistema constituído por barra e molas.

O estudo parte da hipótese de que a flambagem ocorre quando há uma bifurcação do estado de equilíbrio em que a peça pode assumir as configurações reta ou curva.

Com esse raciocínio, faz-se uma estimativa da carga de flambagem mediante a adoção de uma linha elástica aproximada para a forma curva. Considerando que é difícil encontrar uma solução exata para o problema em questão, a escolha adequada da equação aproximada da linha elástica é essencial para assegurar boa precisão nos resultados finais.

Além de necessariamente satisfazer as condições de extremidades da peça, a equação aproximada deve atender certos requisitos particulares de simetria e de número de parâmetros que cada caso estudado requer, sob pena de levar a resultados bem distantes em termos de carga aproximada de flambagem.

Não há reparos a fazer quanto aos resultados apresentados pelas normas de projeto, pois, como não poderia deixar de ser, a precisão demonstra que as equações aproximadas foram apropriadamente escolhidas em todos os casos.

A discussão que se pretende acrescentar é quanto à interpretação e as aplicações desses resultados, principalmente no aspecto que diz respeito à utilização da carga crítica de Euler na determinação dos

valores das rigidezes das barras de contraventamento e na estimativa das forças que atuam nestas barras.

2. APLICAÇÃO DOS TEOREMAS DE ENERGIA

2.1 Cálculo da rigidez das barras pelo princípio do mínimo da energia potencial total do sistema

A rigidez das barras de contraventamento K_M pode ser entendida como a rigidez de uma mola elástica que contribui para a estabilidade de uma peça comprimida.

Pode-se fazer comparações entre os valores prescritos pelas normas e as rigidezes de molas elásticas situadas em qualquer posição em termos de número de intervalos de linhas de contraventamentos.

Entretanto, por uma questão de racionalização de espaço, aqui será tomado como exemplo em análise o caso da figura 1, com duas molas e $m = 3$. Trata-se de uma peça de comprimento L , com três intervalos entre linhas de contraventamento, submetida a uma carga de compressão P .

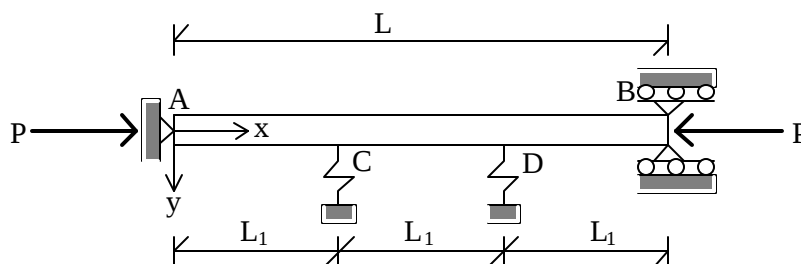


Figura 1 - Peça comprimida com duas molas

A linha elástica aproximada será uma função $y = f(x)$ para a forma curva da peça em equilíbrio na condição de flambagem, em um sistema de referência x, y , onde x é o eixo da peça principal comprimida.

O princípio do mínimo da energia potencial total pode ser aplicado para a determinação do valor aproximado da rigidez das molas.

O potencial total é a soma ($U + V$), sendo U a energia armazenada na peça principal e nas molas, e V o potencial da força P aplicada.

A energia armazenada na peça principal comprimida é dada por

$$U_{\text{peça}} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

onde:

E é o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção transversal da peça no plano de contraventamento.

A energia armazenada na mola é dada pela expressão

$$U_{\text{mola}} = \frac{k_M (d_M)^2}{2} \quad (2)$$

onde:

k_M é a rigidez da mola e δ_M o deslocamento da mola (ou flecha da peça comprimida no ponto de ligação com a mola).

A soma $U = U_{\text{peça}} + U_{\text{mola}}$ é a energia armazenada no conjunto estrutural.

O potencial da força aplicada é dado pela expressão

$$V = - P u \quad (3)$$

onde u é o deslocamento na direção axial da peça, dado por

$$u = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (4)$$

Então, o potencial total fica

$$(U + V) = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k_M (d_M)^2}{2} - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (5)$$

Adotando uma equação para a linha elástica aproximada com os dois primeiros termos pares da série de Fourier, tem-se

$$y = A_2 \sin \frac{2\delta}{L} x + A_4 \sin \frac{4p}{L} x \quad (6)$$

A aplicação do princípio do mínimo da energia potencial total pode ser resumida com as seguintes expressões:

$$\frac{\partial (U + V)}{\partial A_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial (U + V)}{\partial A_4} = 0 \quad (7)$$

Apresentados os conceitos básicos, passa-se aqui para o desenvolvimento algébrico das equações diferenciais.

$$\frac{dy}{dx} = A_2 \frac{2p}{L} \cos \frac{2p}{L} x + A_4 \frac{4p}{L} \cos \frac{4p}{L} x \quad (8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A_2 \frac{4p^2}{L^2} \sin \frac{2p}{L} x - A_4 \frac{16p^2}{L^2} \sin \frac{4p}{L} x \quad (9)$$

Elevando ao quadrado esta última expressão, substituindo na equação (1) e integrando, resulta a energia armazenada na peça comprimida:

$$U_{\text{peça}} = \frac{4EI p^4}{L^3} (A_2^2 + 16 A_4^2) \quad (10)$$

Para calcular a energia armazenada na mola do ponto C, primeiro, substitui-se $x = L/3$ na equação (6) e obtém-se a expressão

$$y_c = 0,866 (A_2 - A_4) \quad (11)$$

Elevando ao quadrado esta última expressão e substituindo na equação (2), tem-se a energia armazenada na mola do ponto C:

$$U_{\text{mola(C)}} = \frac{k_M}{2} 0,75 (A_2^2 + A_4^2 - 2 A_2 A_4) \quad (12)$$

Por simetria, deduz-se que a energia armazenada na mola do ponto D é igual a do ponto C, resultando a energia armazenada nas molas:

$$U_{\text{molas}} = 0,75 k_M (A_2^2 + A_4^2 - 2 A_2 A_4) \quad (13)$$

Elevando ao quadrado a equação (8), substituindo na equação (4), integrando e substituindo na equação (3), tem-se o potencial da força P aplicada:

$$V = -\frac{P p^2}{L} (A_2^2 + 4 A_4^2) \quad (14)$$

Portanto, o potencial total é

$$(U + V) = \frac{4EI p^4}{L^3} (A_2^2 + 16 A_4^2) + 0,75 k_M (A_2^2 + A_4^2 - 2 A_2 A_4) - \frac{P p^2}{L} (A_2^2 + 4 A_4^2) \quad (15)$$

Operando as derivadas parciais indicadas nas equações (7), têm-se duas equações:

$$\left(\frac{8 EI p^4}{L^3} + 1,5 k_M - \frac{2 P p^2}{L} \right) A_2 - 1,5 k_M A_4 = 0 \quad (16)$$

$$-1,5 k_M A_2 + \left(\frac{128 EI p^4}{L^3} + 1,5 k_M - \frac{8 P p^2}{L} \right) A_4 = 0 \quad (17)$$

A solução trivial do sistema de equações é quando $A_2 = A_4 = 0$, que corresponde à configuração reta de equilíbrio, o que não interessa por razões óbvias ao presente estudo.

Fazendo o determinante do sistema de equações igual a zero, tira-se o valor da rigidez k_M correspondente a uma configuração curva de equilíbrio estável:

$$k_M = \frac{-\frac{1024 EI p^4}{P L^3} + \frac{320 p^2}{L} - \frac{16 P L}{EI}}{\frac{204}{P} - \frac{15 L^2}{EI p^2}} \quad (18)$$

Substituindo L por $3L_1$ e P pela carga crítica com o comprimento L_1 , isto é

$$L = 3 L_1 \text{ e}$$

$$P = P_{\text{crit}} = \frac{p^2 EI}{L_1^2} ; \text{ resulta}$$

$$k_M = 2,967 \frac{p^2 EI}{L_1^3} \quad (19)$$

2.2 Comparação com as prescrições da NBR 7190/97 Projeto de Estruturas de Madeira

A norma brasileira de projetos de estruturas de madeira recomenda a rigidez calculada pela expressão:

$$K_{\text{br},1,\text{min}} = 2 \acute{a}_m \frac{p^2 E_{c0, \text{ef}} I_2}{L_1^3} \quad (20)$$

Sendo

$$\acute{a}_m = 1 + \cos \frac{p}{m}$$

onde:

m é o número de intervalos de comprimento L_1 entre as $(m-1)$ linhas de contraventamento ao longo do comprimento total L da peça principal;

L_1 é a distância entre elementos de contraventamento;

$E_{c0,ef}$ é o valor do módulo de elasticidade paralelo às fibras da madeira da peça principal contraventada, conforme 6.4.9;

I_2 é o momento de inércia da seção transversal da peça principal contraventada, para flexão no plano de contraventamento."

Como alternativa para a determinação do valor de α_m , a norma brasileira NBR 7190/97 apresenta uma tabela que resume os possíveis valores deste parâmetro, com os seguintes dados:

Valores de α_m

m	α_m
2	1
3	1,5
4	1,7
5	1,8
∞	2

Comparando a rigidez k_M com $K_{br,1,min}$ da norma brasileira, equação (20), sendo E substituído por $E_{c0,ef}$ e I por I_2 , chega-se à seguinte igualdade:

$$2,967 = 2 \alpha_m ;$$

$$\alpha_m = 1,4835 \simeq 1,5$$

Sendo este o valor de α_m com $m = 3$.

Portanto, a expressão da norma brasileira pode ser obtida a partir da aplicação do princípio do mínimo da energia potencial total.

Para outros valores de m , basta escolher adequadamente a equação aproximada da linha elástica, tomando-se o cuidado para que não prevaleça apenas a solução trivial apontada no item anterior.

3. CONCLUSÃO

3.1 Valor da rigidez prescrita pela NBR 7190/97 Projeto de Estruturas de Madeira

A rigidez $K_{br,1,min}$ da norma brasileira, similar à prescrita pelo *Eurocode 5* é obtida mediante a substituição da força aplicada P pela carga crítica P_{crit} , sendo esta calculada com o comprimento de referência L_1 .

Entretanto, o que parece mais realista seria a utilização de um critério que levasse em consideração o valor da força de compressão N_d em substituição da carga crítica P_{crit} , que resultaria na expressão:

$$K_{br,1,min} = 2 \alpha_m \frac{N_d}{L_1} \quad (21)$$

onde N_d substituiria a carga crítica de Euler P_{crit} . Com os dados da norma, entende-se que a carga crítica seria igual a $\frac{P^2 E_{c0, ef} I_2}{L_1^2}$.

3.2 Forças atuantes nas barras de contraventamento

Considerando as barras de contraventamento funcionando como molas elásticas, as forças F_{1d} atuantes nestas barras, com valor convencional correspondente a uma curvatura inicial com flecha da ordem de 1/300 do comprimento L_1 da peça principal, poderiam ser deduzidas a partir da expressão:

$$F_{1d} = K_{br,1,min} \frac{L_1}{300} \quad (22)$$

Substituindo $K_{br,1,min}$ pela equação (21), fica

$$F_{1d} = 2 \alpha_m \frac{N_d}{L_1} \frac{L_1}{300} \quad (23)$$

Simplificando, resulta

$$F_{1d} = \alpha_m \frac{N_d}{150} \quad (24)$$

Dentro dessa hipótese, substitui-se α_m pelo seu menor valor, isto é, por $\alpha_m = 1$, para o caso particular de $m = 2$, e encontra-se o valor prescrito pela NBR 7190/97:

$$F_{1d} = \frac{N_d}{150} \quad (25)$$

3.3 Sugestões para a racionalização do dimensionamento

- a) Por uma questão de segurança e até por fidelidade aos fundamentos, no cálculo da força atuante nas barras de contraventamento, o valor mais desfavorável de α_m é 2. Adotando-se este valor, a expressão F_{1d} ficaria com uma expressão que levaria a valores mais rigorosos:

$$F_{1d} = \frac{N_d}{75} \quad (26)$$

- b) Conclui-se que a equação da rigidez $K_{br,1,min}$ das normas de projeto de estruturas é determinada conforme a dedução apresentada neste trabalho; porém, a adoção da equação (21) poderia levar o dimensionamento a valores mais realista.

BIBLIOGRAFIA

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1997). *NBR 7190 - Projeto de Estruturas de Madeira*. Rio de Janeiro.
- CAMPANARI, F.A. (1985). *Teoria das estruturas*. v.2. Rio de Janeiro, Guanabara Dois.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (1993). *Eurocode 5 - Design of timber structures*. Bruxelas.
- FEODOSSIEV, V. (1954). *Résistence des materiaux*. Moscou, Editions de la Paix.
- NATIONAL DESIGN SPECIFICATION FOR WOOD CONSTRUCTION (1992). *Structural lumber, glued laminated timber, timber piles, connections*. New York.
- RICARDO, O.G.S. (1978). *Teoria das Estruturas*. São Paulo, Universidade de São Paulo.
- TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, London

Endereço dos autores:

Fábio Armando Botelho Cordovil: fabcordovil@uem.br
Professor Adjunto

Av. Colombo, 5790
CEP 87020-900, Maringá, Paraná
fone: (044) 261-4442
fax: (044) 261-4322