RESOLUÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS ATRAVÉS DA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

Marcio Leandro Michelim
Acadêmico – Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
e-mail: michelim_eng@hotmail.com

Ismael Wilson Cadamuro Jr
Prof. M.Sc. da Universidade Estadual de Maringá
Doutorando em Engenharia de Estruturas – USP
e-mail: ismaelwilson@bol.com.br

RESUMO
O presente trabalho apresenta um estudo sobre a aplicação da Análise Matricial de Estruturas na resolução de pórticos planos. Traz considerações, formulários e roteiro de cálculo. Este estudo, ainda, está inserido no âmbito de uma Iniciação Científica (PIC), em desenvolvimento.

1. INTRODUÇÃO
O método da Análise Matricial de Estruturas desponta como um instrumento matemático adequado para um tratamento sistemático, rigoroso e sobretudo, geral de análise de estruturas, pois além de permitir a generalização desejada, também se adapta ao emprego em computadores. Pretende-se apresentar o cálculo de estruturas reticuladas, em particular pórticos planos, desenvolvendo a formulação matricial do Método dos Deslocamentos, aplicada aos pórticos planos.

2. PREMISSAS BÁSICAS
Segundo CADAMURO JR (2002) a estrutura pode ser definida como um conjunto de elementos, ou barras, unidos entre si (Figura 1).

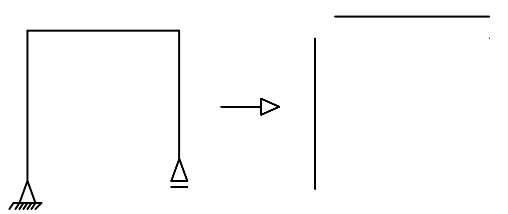


Figura 1

Como indicado na Figura 2, os nós da estrutura são os pontos de ligação entre os elementos, assim como os pontos de apoio e os de extremidade livre dos elementos.

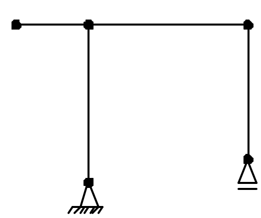


Figura 2

3. SISTEMA DE COORDENADAS

Para identificar e ordenar forças e deslocamentos CADAMURO JR (2002) sugere a adoção de direções (ou coordenadas) devidamente numeradas, podendo ser locais ou globais.

3.1 Coordenadas Locais

São associadas às extremidades do elemento e devem permitir que se associe à elas as forças e deslocamentos relevantes das extremidades dos elementos, como se observa na Figura 3.

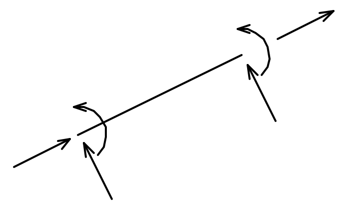


Figura 3

Em relação às coordenada locais, tem-se:

{P} → vetor dos esforços nas extremidades dos elementos

{δe}→ vetor dos deslocamentos das extremidades dos elementos segundo suas coordenadas locais

[re] → matriz de rigidez do elemento segundo suas coordenadas locais.

3.2 Coordenadas Globais

São associadas aos nós da estrutura e devem permitir a associação de forças e deslocamentos relevantes dos nós. Como se observa na Figura 04, cada nó possui seu sistema de coordenadas, sendo 3 coordenadas para cada nó, de acordo com Numéro de Graus de Liberdade (Ngl) da estrutura.

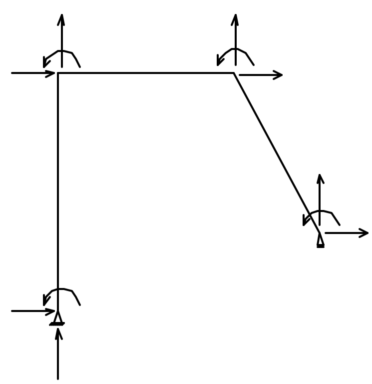


Figura 4

Em relação às coordenadas globais, tem-se:

{F} → vetor das forças nodais

{U} → vetor dos deslocamentos nodais

[rg] → matriz de rigidez do elemento segundo suas coordenadas globais

[R] → matriz de regidez da estrutura

4. NUMERAÇÕES

Em um problema de pórtico plano deve-se:

a) arbitrar:

- a numeração dos nós: (Figura 5 traz um exemplo)

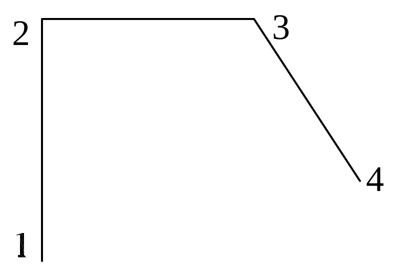


Figura 5

- a numeração dos elementos: (Figura 6)

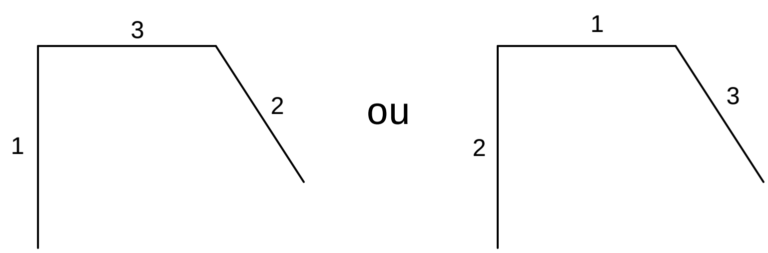


Figura 6

- a incidência dos elementos: (Figura 7)
  Nó inicial = j
  Nó final = k

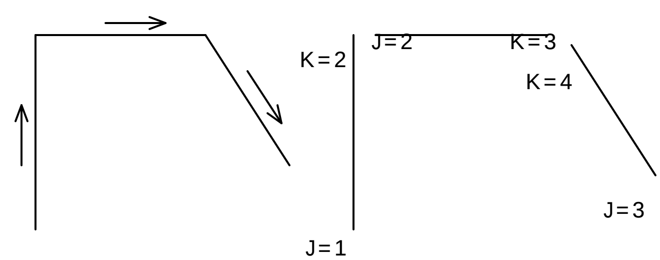


Figura 7

b) Calcular:

- A numeração das coordenadas globais, fazendo as 3 primeiras coordenadas globais para o nó 01, as próximas 3 para o nó 02 e assim sucessivamente, como é visto na Figura 8.

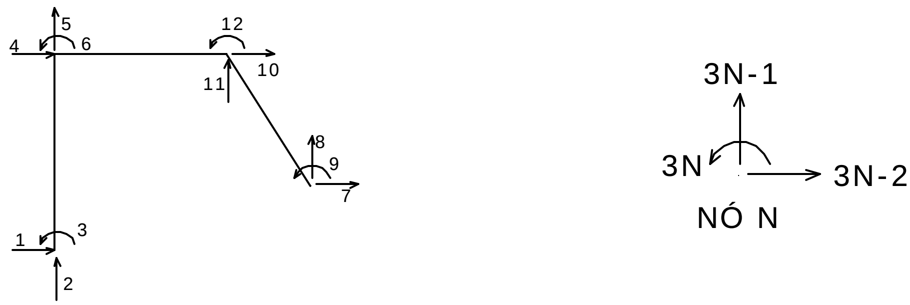


Figura 8

- As coordenadas globais dos elementos (Figura 9): o nó inicial (j) de um elemento qualquer terá as coordenadas globais (3j-2), (3j-1) e (3j), e o seu nó final (k) as coordenadas globais (3k-2), (3k-1) e (3k).

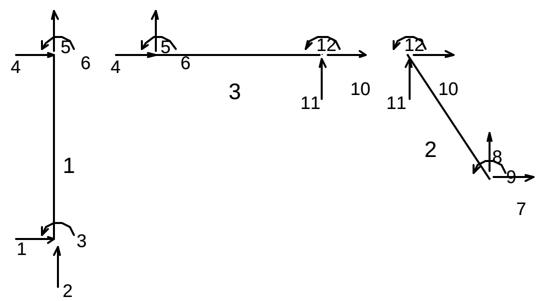


Figura 9

- As coordenadas locais dos elementos: (Figura 10)

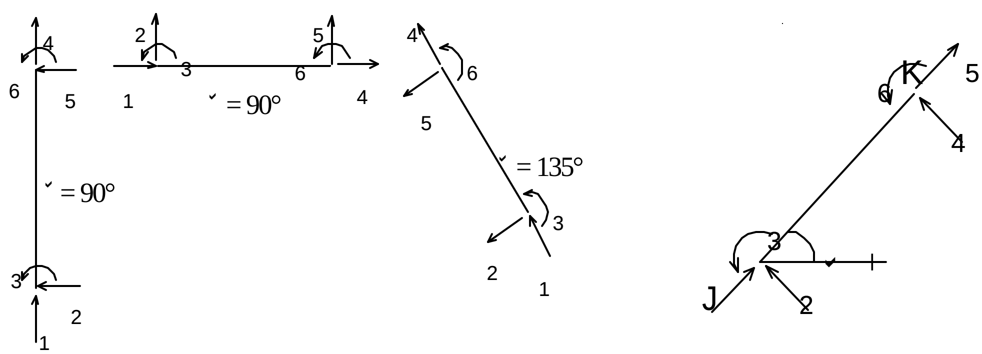


Figura 10

5. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO SEGUNDO SUAS COORDENADAS LOCAIS [re]

MOREIRA (1977) informa que o mais simples dos sistemas elásticos é composto por uma mola linear de constante K, Figura 11

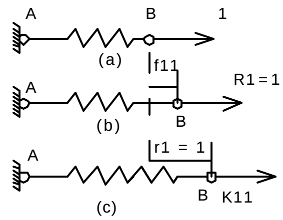


Figura 11

Aplicando-se a força F=1 ao sistema (Figura 11), surge o deslocamento é u. Por outro lado, se for possível à estrutura o deslocamento u=1, a manutenção da configuração deformada exigirá que se aplique a força F=r. Tem-se então que:

- coeficiente de rigidez K é a ação mecânica associada à configuração deformada r=1.

CADAMURO JR (2002) também define rigidez como sendo a relação entre uma força e um deslocamento correspondente, ou como a força necessária para provocar um deslocamento unitário em sua direção e sentido, como mostrado na Figura 12.

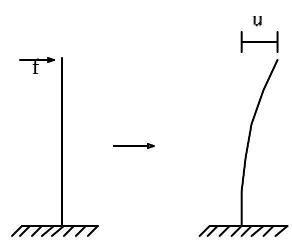


Figura 12

Segundo CADAMURO JR (2002) a Matriz de Rigidez é a relação entre um vetor de forças e um vetor de deslocamentos (Figura 13). Se esses vetores forem referenciados às coordenadas locais do elemento, como na Figura 14, onde se verifica as coordenadas locais para um elemento de pórtico plano, temos a Matriz de Rigidez [re] que é definida a seguir.

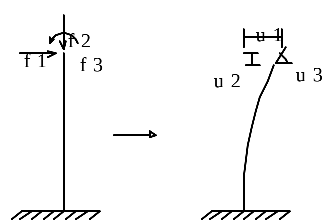


Figura13

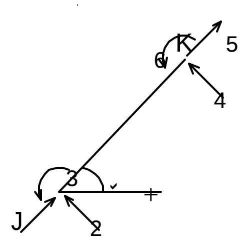


Figura 14

$$[re]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \qquad (01)$$

6. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO SEGUNDO SUAS COORDENADAS GLOBAIS [rg]

A Analise Matricial de Estruturas requer o conhecimento das matrizes de rigidez dos elementos segundo suas coordenadas globais [rg].
Sendo conhecidas a [re], calcula-se a [rg] com:

$$[rg]_{6x6} = [be]^T_{6x6}.[re]_{6x6}.[be]_{6x6} \qquad (02)$$

onde:
$[be]$ = matriz de incidência cinemática, ou matriz de rotação do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais.

Para pórtico plano:

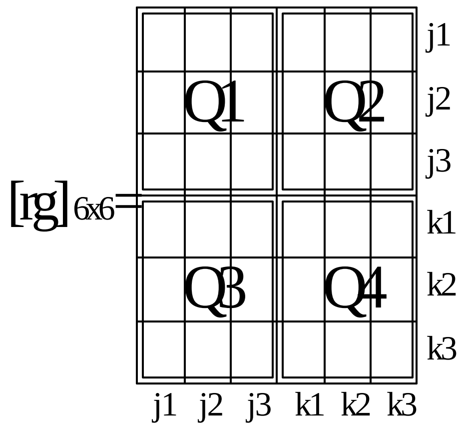
$$[be]=\begin{bmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a & 0 & & & \\ -\operatorname{sen} a & \cos a & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos a & \operatorname{sen} a & 0 \\ & & & -\operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (03)$$

onde:
α = ângulo a partir do nó j (inicial), entre a horizontal e o eixo do elemento, considerando positivo se o sentido for anti-horário

Assim, tem-se $[rg]_{6x6}$, com 4 quadrantes

7. MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA [R]

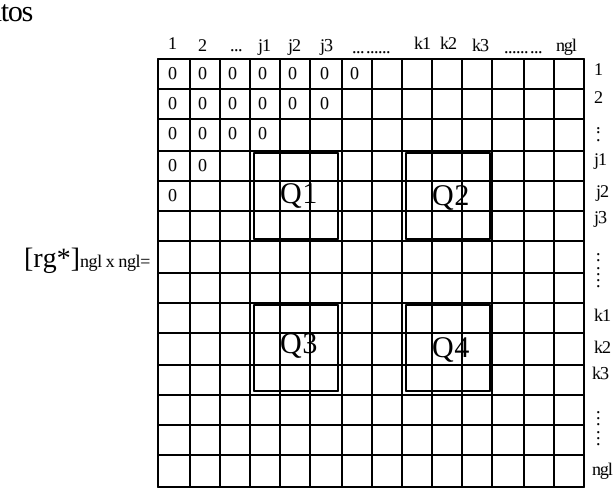
A Matriz de Rigidez da Estrutura [R] é constituída pela soma adequada das matrizes [rg] de todos os elementos. A ordem dessa matriz é de acordo com os números de graus de liberdade de cada nó, ou seja, de acordo com os deslocamentos de translação vertical, translação horizontal e giro.
Logo,



(04)

$$[R]_{NglxNgl} = [rg_1 *]_{NglxNgl} + [rg_2 *]_{NglxNgl} + \ldots + [rg_m *]_{NglxNgl} \quad (05)$$

onde:
m = número de elementos



(06)

8. VETORES DE FORÇAS NODAIS {F}

O Vetor de Forças Nodais {F} é ligado às coordenadas globais e é composto de 2 parcelas, a seguir:

$$\{F\} = \text{Ngl . 1} \quad (07)$$

$$\{F\} = \{F_{NÓS}\} + \{F_{BARRAS}\} \quad (08)$$

onde,
$\{F_{Nós}\}$ → É a parcela devido às cargas concentradas (forças ou momentos) aplicadas diretamente nos nós da Estrutura.

$$\{F_{NÓS}\} = \begin{Bmatrix} Fx_e \\ Fy_e \\ Mz_e \end{Bmatrix} \quad (09)$$

$\{F_{Barras}\}\rightarrow$ É a parcela devida as cargas aplicadas nos elementos. É formada pela contribuição das cargas de todas as barras.

As cargas atuantes nas barras geram o Vetor de Engastamento Perfeito nas Coordenadas Locais {Poe} e o Vetor de Engastamento Perfeito nas Coordenadas Globais {Pog}.

8.1 Vetor de Engastamento Perfeito nas Coordenadas Globais {Pog}

Para a barra plana da Figura13 sujeita a um carregamento *P*, uniformemente distribuído ao longo de toda a barra de comprimento *l*, temos

O vetor $\{F_{Barras}\}$ é formado pela contribuição dos vetores {Pog} dos elementos que possuem cargas

$$\{Poe\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Pl/2 \\ Pl^2/12 \\ 0 \\ Pl/2 \\ -Pl^2/12 \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

$$\{Pog\} = [be]^T \{Poe\} \qquad (11)$$

$$\{Pog\} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \\ Q1 \\ \\ \\ Q2 \\ \\ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} j1 \\ j2 \\ j3 \\ k1 \\ k2 \\ k3 \end{array} \qquad (12)$$

$$\{F_{Barras}\}_{Ngl} = \{Pog_1 *\}_{Ngl} + \{Pog_2 *\}_{Ngl} + \ldots + \{Pog_m *\}_{Ngl}$$

$$\{Pog^*\} = \begin{array}{|c|l} \hline 0 & 1 \\ 0 & \vdots \\ 0 & \\ & j1 \\ Q1 & j2 \\ & j3 \\ 0 & \vdots \\ 0 & \\ & k1 \\ Q2 & k2 \\ & k3 \\ 0 & \vdots \\ 0 & \\ 0 & ngl \\ \hline \end{array} \qquad (13)$$

9. VETOR DOS DESLOCAMENTOS NODAIS {U}

Depois de montada a matriz [R] e o vetor {F} é possível calcular o vetor dos deslocamentos nodais {U} utilizando da seguinte equação:

$$\{F\} = [R]\{U\} \qquad (14)$$

Deve-se antes, porém, aplicar as condições de contorno que são as coordenadas globais com deslocamentos impedidos por vínculos.

Assim, se a coordenada global "i" estiver impedida por vínculo, deve-se:

Zerar o termo "i" de {F}

Zerar toda a linha "i" de {R}

Zerar toda a coluna "i" de {R}

Fazer R(i,i)=1

Feito isso para todas as coordenadas com vínculos pode-se calcular o Vetor dos Deslocamentos Nodais {U}:

$$\{U\} = [R]^{-1}\{F\} \qquad (15)$$

onde:

{U} = vetor dos deslocamentos nodais = (ngl x 1), segundo as coordenadas globais

10. VETOR DOS DESLOCAMENTOS NA EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS SEGUNDO SUAS COORDENADAS LOCAIS {de}

Depois de calculado {U}, monta-se agora o Vetor dos Deslocamentos das Extremidades dos Elementos {dg},de acordo com suas Coordenadas Globais.

$$\{\delta g\} \rightarrow 6 \text{ x } 1 \qquad (16)$$

Com {δg} calcula-se o Vetor {δe} através de:

$$\{de\}_{6x1} = [be]_{6x6}\{dg\}_{6x1} \qquad (17)$$

11. VETOR DOS ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DO ELEMENTO {Pe}

Tendo os deslocamentos nodais calcula-se os esforços internos solicitantes (M, N, V) dos elementos, utilizando-se das coordenadas locais. Esses esforços internos solicitantes irão compor o Vetor $\{Pe\}$ através da seguinte equação:

$$\{Pe\} = \{Poe\} + [re][de] \tag{18}$$

$$\{Pe\} = \begin{Bmatrix} Nj \\ Qj \\ Mj \\ Nk \\ Qk \\ Mk \end{Bmatrix} \tag{19}$$

onde:
N = Esforço Normal
Q = Esforço Cortante
M = Momento Fletor

Com os resultados obtidos, pode-se traçar os diagramas de M, N e V da estrutura, lembrando-se que os resultados saem com a convenção adotada para as coordenadas locais.

12. VETOR DE REAÇÕES DE APOIO {Fr}

Transforma-se $\{Pe\}$ para coordenadas globais $\{Pg\}$ fazendo:

$$\{Pg\} = [be]^T\{Pe\} \tag{20}$$

Calcula-se as reações de apoio do elemento $\{F_r\}$ fazendo:

$$\{F_r^*\} = \{P_{g1}^*\} + \{P_{g2}^*\} + \{P_{g3}^*\} + \ldots \tag{21}$$

onde o número de elementos do vetor $\{Pg_e^*\}$ é definido de acordo com o número de coordenadas globais da estrutura, acrescentando-se 0 (zeros) até o número de coordenadas globais definido.

$$\{F_r\} = \{F_r^*\} - \{F_{NÓS}\} \tag{22}$$

$$\{F_r\} = \begin{Bmatrix} RFx_{Nó} \\ RFy_{Nó} \\ RMz_{Nó} \end{Bmatrix} \tag{23}$$

Para o cálculo de {Fr} precisa-se dos vetores {Pg} (um {Pg} para cada elemento).

$$\{Pg\} = [be]^T\{Pe\} \tag{24}$$

Tendo {Pg} monta-se o vetor {Pg*} (um {Pg*} para cada elemento).

$$\{Pg\} = \left[\begin{array}{c} \\ Q1 \\ \\ \\ Q2 \\ \\ \end{array}\right]\begin{array}{l} j1\\ j2\\ j3\\ k1\\ k2\\ k3\end{array} \qquad (25)$$

$$\{Pg^*\} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ Q1 \\ \\ 0 \\ 0 \\ \\ Q2 \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} 1\\ \vdots \\ \vdots \\ j1\\ j2\\ j3\\ \vdots \\ \vdots \\ k1\\ k2\\ k3\\ \vdots \\ \vdots \\ ngl\end{array} \qquad (25)$$

13. ROTEIRO DE CÁLCULO

1- Arbitrar a numeração do nós;
2- Arbitrar a numeração dos elementos;
3- Arbitrar a incidência dos elementos;
4- Calcula a numeração das coordenadas globais;
5- Calcular as coordenadas globais dos nós j e k de cada elemento
6- Calcular as coordenadas locais de cada elemento
7- Calcular [re] de cada elemento;
8- Calcular [*be*] de cada elemento;
9- Calcular [rg] de cada elemento;
10- Montar [R]
11- Montar $\{F_{Nós}\}$
12- Calcular {Poe} de cada elemento;
13- Calcular {Pog} de cada elemento;
14- Montar $\{F_{Barras}\}$
15- Calcular {F}
16- Aplicar as condições de contorno sobre [R] e {F}
17- Calcular {U}

18- Montar $\{\delta g\}$de cada elemento
19- Calcular $\{\delta e\}$ de cada elemento
20- Calcular {Pe} de cada elemento
21- Calcular {Pg} de cada elemento
22- Calcular {Fr}
23- Analisar resultados
{U} → deslocamentos nodais segundo as coordenadas globais
{Fr}→ reações de apoio segundo as coordenadas globais
{Pe}→ esforços internos segundo as coordenadas locais de cada elemento

14. CONCLUSÃO

Apresentou-se um estudo sobre a aplicação da Análise Matricial de Estruturas na resolução de Pórticos Planos. Todas as etapas de tal análise foram explicitadas. Conclue-se, portanto, que há subsídios suficientes para que se proceda a próxima etapa da Iniciação Científica do autor, que é a automatização do procedimento exposto através da linguagem computacional FORTRAN POWERSTATION 4.

15. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAGÃO FILHO, Luiz A. C. Muniz (2002). *Notas de Aulas de Análise Matricial de Estruturas*. UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.

CADAMURO JR, Ismael Wilson (2002). *Notas de Aulas da Disciplina Mecânica das Estruturas*. UEM – Universidade Estadual de Maringá. Maringá.

FREITAS NETO, José de Almeida; VIEIRA, Inaldo Ayres (1974). *Análise Matricial de Estruturas*. Editora da UFPR. Curitiba.

GERE; WEAVER (1966). *Analysis of Framed Structures*. Van Nostrand.

MOREIRA, Dominício Falcão (1977). *Análise matricial das estruturas*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos.

ANTUNES, João Carlos; ANTUNES, Helena M. C. (1994). *Introdução à Análise Matricial de Estruturas*. Univerdidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos.