ALGUNS ASPECTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS ELASTODINÂMICOS BIDIMENSIONAIS NO DOMÍNIO DE LAPLACE

Ângelo Vieira Mendonça, e-mail: a.v.mendonca@uel.br Departamento de estruturas, CTU, Universidade Estadual de Londrina, C.P. 6001, CEP 86051-990, Londrina, PR, Brasil.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) utilizando-se equações integrais em coordenadas locais para os campos de deslocamentos e tensoriais dos problemas elastodinâmicos bidimensionais no domínio de Laplace. Além disso, as soluções fundamentais utilizadas nas representações integrais são escritas em uma forma completamente explícita. Os aspectos discutidos neste artigo são direcionados especificamente para o tratamento matemático das equações integrais do meio contínuo e suas correspondentes soluções fundamentais. As técnicas empregadas para a discretização do meio contínuo (obtenção das equações integrais discretizadas e representações algébricas) e, principalmente, a análise numérica de alguns problemas serão apresentadas em futuros trabalhos.

1. Introdução

Uma das áreas de estudo mais importantes da mecânica dos sólidos é sem dúvida a elastodinâmica. A pesquisa nesta área não é recente, existindo registros de investigações já no século XIX, de forma que os principais teoremas e princípios foram estabelecidos basicamente até a primeira metade do século XX, e equações para muitos problemas dinâmicos transientes e permanentes, formuladas tanto no domínio do tempo quanto no domínio transformado, foram disponibilizadas nesse período. Contudo, a obtenção de soluções analíticas para essa classe de equações são extremamente difíceis e restritas a casos particulares de geometria, carregamentos, etc. Como alternativa, soluções aproximadas foram propostas nesse período, empregando-se técnicas numéricas, que geralmente conduzem a manipulação de um grande número de operações algébricas, o que limitava sensivelmente esta estratégia de solução até então. Só a partir da década de 1960, com a evolução dos computadores, as técnicas numéricas tornaram-se uma ferramenta viável na busca de soluções das equações governantes de muitos problemas. Uma dessas técnicas é o então chamado Método dos Elementos de Contorno(MEC) que tem sido formulado aplicando-se, principalmente, duas abordagens: a indireta e a direta.

A forma indireta do MEC representa o problema a partir de equações integrais envolvendo densidades fictícias; em problemas elastodinâmicos representados no domínio transformado, muitos trabalhos podem ser citados, dentre eles: Sanchez-Sesma & Esquivel(1979), Sanchez-Sesma & Rosenblueth(1979), Wong(1982), Dravinsky(1983), Bravo & Sanchez-Sesma(1990) que desenvolveram técnicas especiais do método indireto do MEC para a solução de problemas de espalhamento de ondas para os estados planos ou de anti-plano e Mossessian & Dravinsky(1989), Bouchon et al. (1995) para problemas 3D.

Uma outra classe de formulações do MEC é o então denominado *método direto*. A principal característica dessa técnica é que a representação integral é obtida empregando-se diretamente as variáveis físicas reais do problema. Aparentemente, Cruse & Rizzo (1968) é o

primeiro trabalho a empregar o método direto para estabelecer as representações integrais, em coordenadas globais para deslocamentos e tensões, para problemas elastodinâmicos bidimensionais no domínio de Laplace. Em Cruse(1968), artigo simultaneamente publicado ao co-autorado com Rizzo, são discutidas técnicas para a manipulação algébrica das representações integrais; um exemplo é apresentado para o caso de um semi-plano submetido a tensões uniformes no contorno. As respostas para os campos de deslocamentos e tensões no interior e no contorno do problema foram obtidas empregando-se uma interpolação constante para as variáveis, enquanto que elementos retos foram utilizados para a geometria. As soluções das análises obtidas originalmente no domínio de Laplace foram convertidas para o domínio do tempo mediante a inversão numérica da transformada de Laplace utilizando-se o algoritmo de Papoulis(1957), que requer apenas manipulações algébricas no campo dos reais. A representação integral de deslocamentos de Cruse também foi utilizada nos trabalhos de Manolis & Beskos(1981,1983), Manolis(1983), Manolis & Beskos(1988), em que as variáveis do problema foram interpolados por representações constante e quadrática; exemplos foram apresentados envolvendo casos de radiação e espalhamento de ondas elásticas em semi-planos com ou sem interação com estruturas rígidas. Alternativamente ao algoritmo de Papoulis, foi empregado a técnica numérica de inversão da transformada de Laplace discutida em Durbin(1974) - que requer manipulações algébricas no campo dos números complexos- uma vez que foi constatado que a técnica de Papoulis é estável apenas para os primeiros valores do espectro de parâmetros de transformação. Já Niwa et al.(1975), Kobayashi & Nishimura(1982) estudaram soluções para problemas elastodinâmicos planos em regime permanente formulados no domínio da freqüência e a resposta transiente foi obtida com o auxílio da transformada de Fourier. Embora as representações integrais de tensões em coordenadas globais tenham sido publicadas em 1968 no trabalho de Cruse, suas soluções fundamentais só foram apresentadas no trabalho de Ahmad & Banerjee (1988), contudo, esses autores deixaram para o leitor o algebrismo das etapas finais para a obtenção da forma explícita desses tensores fundamentais.

Os artigos mencionados anteriormente constituem parte das grandes contribuições para evolução do MEC em dinâmica dos sólidos no domínio transformado. Referências adicionais podem ser encontradas em muitos trabalhos, dentre eles, constam os artigos de Beskos (1986,1997), onde uma ampla revisão de trabalhos é apresentada para diversos aspectos do MEC em problemas elastodinâmicos, inclusive no domínio do tempo.

O objetivo deste artigo é adaptar uma representação local para as equações integrais de deslocamentos e de tensões de Cruse & Rizzo(1968) - originalmente escritas em coordenadas globais - com intuito de facilitar a prescrição de condições de contorno em bordos esconsos, assim como viabilizar o acoplamento de sub-domínios com seus contornos posicionados genericamente no domínio do problema original. Essa mesma representação local é estendida para as equações integrais dos gradientes de deslocamento. Além disso, as soluções fundamentais dessas equações integrais são apresentadas em uma forma completamente explícita, propiciando expressões expeditas para os leitores. Tanto as equações integrais discretizadas e as representações algébricas para a montagem do sistema de equações do problema, quanto o estudo de alguns casos via análise numérica serão apresentados em futuros trabalhos.

2. Definição do problema elastodinânico

Seja Ω a região ocupada pelo domínio de um corpo bidimensional de espessura h, cujo contorno é denotado por Γ . Os campos e geometria do problema são escritos em relação

ENTECA 2003 IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

a um sistema de referência global (x_1, x_2) no espaço e em t no tempo. Desde que as hipóteses de pequenos deslocamentos sejam admitidas, as relações cinemáticas podem ser expressas por:

$$\mathbf{e}_{ij}(x,t) = [u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)]/2$$
(1)

onde $e_{ii}(x,t)$: componente do tensor das resultantes de tensão em relação a (x_1, x_2) ;

 $u_i(x,t)$: componentes de deslocamentos em relação a (x_1, x_2) ;

As expressões são escritas empregando-se a convenção da *notação indicial* e com *índices variando de 1 a 2*. Além disso, vírgulas nos sub-índices das representações matemáticas denotam derivadas espaciais.

Se o meio for homogêneo, isótropo e elastolinear, as relações constitutivas, conhecidas como *lei de Hooke*, podem ser expressas como:

$$N_{ij}(x,t) = h \left[a e_{kk}(x,t) d_{ij} + 2 m e_{ij}(x,t) \right] = h C_{ijkl} e_{kl}(x,t) = h C_{ijkl} u_{k,l}(x,t)$$
(2)

onde $N_{ii}(x, t)$: componente do tensor das resultantes de tensão em relação a (x_1, x_2) ;

 $C_{ijkl} = \mathbf{ad}_{ij}\mathbf{d}_{kl} + \mathbf{md}_{il}\mathbf{d}_{jk} + \mathbf{md}_{ik}\mathbf{d}_{jl} : \text{ componentes do tensor de rigidez;}$ $\mathbf{a} = 2\mathbf{nn}_{p} / (1 - 2\mathbf{n}_{p}), \mathbf{m} = E / 2(1 + \mathbf{n}) : \text{ constantes de Lamé;}$ $\mathbf{n}, E: \text{ coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade longitudinal;}$ $\mathbf{n}_{p} = \begin{cases} \mathbf{n} & \text{, estado plano de deformação} \\ \mathbf{n} / (1 + \mathbf{n}) & \text{, estado plano de tensão} \end{cases} : \text{ coeficiente de Poisson aparente;}$ $\mathbf{d}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} & i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} : \text{ delta de Kroenecker.}$

As forças de superfície podem ser obtidas utilizando-se uma relação conhecida como Fórmula de tensão de Cauchy dada por:

$$p_i(x,t) = N_{ij}(x,t)\mathbf{h}_j \tag{3}$$

onde h_j : componente do versor normal ao contorno em x.



Figura 1- Elemento diferencial em coordenadas globais (x_1, x_2) .

IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

Se for feito o balanço de forças atuantes (ação externa aplicada, gravitacional e inércia) em um elemento diferencial do problema (vide figura 1), as equações diferenciais de equilíbrio dinâmicas podem ser expressas como:

$$N_{iii}(x,t) + \mathbf{r}b_i(x,t) = \mathbf{r}u_j(x,t)$$
⁽⁴⁾

onde pontos super-escritos denotam derivadas temporais dos campos;

 $u_i(x,t)$: componente de aceleração relação a (x_1, x_2) ;

 $b_i(x,t)$: componente de força volumétrica específica em relação a (x_1, x_2) ;

r : densidade de massa.

Uma maneira alternativa à (4) para expressar as equações do movimento é partir da substituição de (1) em (4), resultando, portanto, nas bem-conhecidas equações diferenciais parciais hiperbólicas de Navier-Cauchy para corpos bidimensionais:

$$\left(c_{1}^{2}-c_{2}^{2}\right)u_{i,ij}(x,t)+c_{2}^{2}u_{j,ii}(x,t)+b_{j}(x,t)=u_{j}(x,t),$$
(5)

onde:

 $c_1 = \sqrt{(l + m)/r}$: velocidade de propagação da onda longitudinal; $c_2 = \sqrt{m/r}$: velocidade de propagação da onda distorcional.

Os deslocamentos e as forças de superfície $p_i(x,t)$ devem satisfazer as seguintes *condições de contorno*:

$$t_i = N_{ij}(x, t)\mathbf{h}_j = p_i(x, t) \text{ em } x \in \Gamma_t$$
$$q_i = u_i(x, t) \text{ em } x \in \Gamma_u$$

onde Γ_t , Γ_u : respectivas porções de Γ onde as forças e deslocamentos estão prescritos.

Outras relações, para deslocamentos e velocidades $u_i(x,t)$, conhecidas como *condições iniciais*, também devem ser satisfeitas no domínio do problema:

$$u_i(x,t=0) = u_{i0}(x) \text{ em } x \in \Omega \cup \Gamma$$

$$u_i(x,t=0) = v_{i0}(x) \text{ em } x \in \Omega \cup \Gamma.$$

Se o domínio do corpo estende-se até o infinito, uma quarta relação (conhecida *condição de radiação de Sommerfeld*) deve ser satisfeita no infinito:

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ u_{i,r}^d + 1/c_1 u_i^d \right\} = 0(r^{-1/2}), \qquad \lim_{r \to \infty} \left\{ u_{i,r}^r + 1/c_2 u_i^r \right\} = 0(r^{-1/2})$$
(6)

onde (u_i^d, u_i^d) , (u_i^r, u_i^r) : parcelas dilatacional e distorcional do deslocamento e velocidade.

Um dos importantes recursos utilizados na matemática está associado às transformações de domínios de mapeamento dos campos, dentre elas, tem-se a transformada de Laplace. Se essa for aplicada ao domínio do tempo de função f(x,t), ela conduz a uma forma $\overline{f}(x,s)$ estabelecida no domínio de Laplase *s* e definida como:

$$L(f) = \overline{f}(x,s) = \int_{0}^{\infty} f(x,t)e^{-st}dt$$
⁽⁷⁾

Se a transformação de Laplace (7) for aplicada em (5), sua forma hiperbólica original é reduzida ao tipo elíptico no domínio transformado, Cruse & Rizzo(1968):

$$\left(c_{1}^{2}-c_{2}^{2}\right)\overline{u}_{i,ij}(x,s)+c_{2}^{2}\overline{u}_{j,ii}(x,s)+\overline{b}_{i}(x,s)=s^{2}\overline{u}_{j}(x,s)-su_{j0}(x)-v_{j0}(x)$$
(8)

Convém ressaltar que os campos, marcados por sobrebarra, denotam a versão transformada de seus valores no domínio do tempo. Utilizando-se um procedimento análogo, as condições de contorno no domínio transformado podem ser escritas respectivamente como:

$$t_i = N_{ij}(x, s)\mathbf{h}_j = p_i(x, s) \text{ em } x \in \mathbf{I}$$

$$\overline{q}_i = \overline{u}_i(x, s) \text{ em } x \in \Gamma_u$$

3. Equações Integrais em coordenadas locais

Se for admitida a condição inicial de repouso $(u_{io}(q) = 0, v_{i0}(q) = 0)$, a representação integral dos deslocamentos, em relação a um sistema de referência global (x_1, x_2) para a elastodinâmica bidimensional, pode ser escrita a partir de uma identidade dinâmica transformada equivalente à identidade de Somigliana, Cruse & Rizzo(1968):

$$C_{ij}\overline{u}_{j}(p) + \oint_{\Gamma}\overline{p}_{ij}^{*}(p,q,s)\overline{u}_{j}(q)d\Gamma = \oint_{\Gamma}\overline{u}_{ij}^{*}(p,q,s)\overline{p}_{j}(q)d\Gamma + \int_{\Omega_{L}}\overline{u}_{ij}^{*}(p,q,s)\overline{b}_{j}(q)d\Omega; \qquad (9)$$

onde p, q : ponto-fonte, ponto-campo;

 $\overline{u}_{ij}^{*}(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{s}), \overline{p}_{ij}^{*}(\mathbf{p},\mathbf{q},s)$: soluções fundamentais (ver seção 4 para mais detalhes);

 $C_{ij} = \mathbf{I}\mathbf{d}_{ij}$: termo livre, com ($\mathbf{I} = 1$, se $p \in \Omega$); ($\mathbf{I} = 1/2$, se $p \in \Gamma$, tangente única) e



gura 2- Esquema representativo da chapa

Na equação (9), as direções das componentes são expressas utilizando-se apenas um sistema de referência (x_1, x_2) , todavia, em algumas situações pode ser mais atrativo adotar-se sistemas distintos para expressar os campos nos pontos-fonte e campo. Assim, uma técnica adotada nesse artigo é expressar os campos em sistemas de referências locais, sendo o

IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

primeiro associado ao ponto-fonte, com origem e orientado por intermédio de uma direção genérica z. Já um segundo sistema de referência é definido para as variáveis de contorno, de forma que sua origem e orientação seguem as direções tangencial t e normal h ao pontocampo no contorno do problema, vide figura 2. Com isso, a representação integral (9) pode ser rescrita como:

$$D\overline{u}_{z}(p) + z_{i}(p) \oint_{\Gamma} \overline{p}_{ij}^{*}(p,q,s) Q_{jk}(q) \overline{v}_{k}(q) d\Gamma = z_{i}(p) \oint_{\Gamma} \overline{u}_{ij}^{*}(p,q,s) Q_{jk}(q) \overline{t}_{k}(q) d\Gamma + z_{i}(p) \int_{\Omega} \overline{u}_{ij}^{*}(p,Q,s) \overline{b}_{j}(Q) d\Omega$$

$$(10)$$

onde *D*: coefficiente do livre de integral (D = 1, ponto no interior; D = 0, ponto no exterior; D = 1/2 para ponto sobre contorno suave);

 $v_i(\mathbf{q}) \in \overline{t}_i(\mathbf{q})$: deslocamento e força de superfície no sistema (t, h), vide figura 2;

 $\overline{u}_{z}(p)$: deslocamento do ponto-fonte segundo a direção q, isto é, $\overline{u}_{z} = \overline{u}_{i}(p)z_{i}(p)$;

Q(q): matriz de transformação escrita como:

$$Q_{1j}(q) = t_j(q); \qquad j = 1,2$$
 (11a)

$$Q_{2j}(q) = \mathbf{h}_{j}(q); \qquad j = 1,2$$
 (11b)

onde t_i , h_i : componentes das direções t, h em relação ao sistema (x_1, x_2) .

O gradiente dos deslocamentos, representado pela a derivada direcional segundo uma direção *m* de uma componente de deslocamento na direção *z*, pode ser escrita como:

$$\overline{u}_{z,m}(p) = \overline{u}_{i,m}(p)z_i(p) = \overline{u}_{i,j}(p)z_i(p)m_j(p)$$
(12)

Uma equação integral em coordenadas locais (q,m) para os gradientes de deslocamentos de pontos no interior pode ser obtida substituindo-se (10) em (12):

$$\overline{u}_{z,m}(p) + z_i(p) \oint_{\Gamma} \overline{p}_{ijk}^*(p,q,s) m_j(p) Q_{kr}(q) \overline{v}_r(q) d\Gamma =$$

$$z_i(p) \oint_{\Gamma} \overline{u}_{ijk}^*(p,q,s) m_k(p) Q_{kr}(q) \overline{t}_r(q) d\Gamma + z_i(p) \int_{\Omega_L} \overline{u}_{ijk}^*(p,q,s) m_j(p) \overline{b}_k(q) d\Omega; \qquad (13)$$

onde $\overline{p}_{ijk}^{*}(p,q,s)$ e $\overline{u}_{ijk}^{*}(p,q,s)$: soluções fundamentais (detalhes adicionais na seção 4).

Além dos campos deslocamentos e de seus gradientes, um outro campo de interesse da análise de estrutural está associado às resultantes de tensão. A partir da substituição das equações integrais dos gradientes dos deslocamentos(13) nas relações constitutivas (2), as representações integrais das resultantes de tensão N_{mz} , para pontos no interior utilizando-se coordenadas locais segundo as direções (z,m) no ponto-fonte e (t,h) no contorno, podem expressas como:

$$\overline{N}_{mz}(p) + z_i(p) \oint_{\Gamma} \overline{s}_{ijk}^{*}(p,q,s) m_j(p) Q_{ks}(q) \overline{v}_s(q) d\Gamma = z_i(p) \oint_{\Gamma} \overline{d}_{ijk}^{*}(p,q,s) m_j(p) Q_{ks}(q) \overline{t}_s(q) d$$

$$z_i(p) \int_{\Omega_L} \overline{s}_{ijk}^{*}(p,q,s) m_j(p) \overline{b}_k(q) d\Omega$$
(14)

onde $\overline{s}_{ijk}^{*}(p,q,s)$ e $\overline{d}_{ijk}^{*}(p,q,s)$: soluções fundamentais (detalhes adicionais na seção 4).

ENIECA 2003 IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

4. Soluções do problema elastodinâmico fundamental

O problema dinâmico fundamental de corpos elásticos bidimensionais pode ser associado a um disco de espessura h e com raio infinito envolvendo o ponto de aplicação da fonte. Para que esse problema seja configurado como fundamental ele deve satisfazer as relações cinemáticas, constitutivas e de radiação (condições de Sommerfeld). Assim, as equações diferenciais de movimento para o problema elastodinâmico fundamental no domínio de Laplace, inicialmente em repouso, pode ser escrita em uma forma similar à (8):

$$\left(c_{1}^{2}-c_{2}^{2}\right)\overline{\mu}_{j,ij}^{*}(x,s)+c_{2}^{2}\overline{\mu}_{i,jj}^{*}(x,s)+\overline{b}_{i}(x,s)=s^{2}\overline{\mu}_{j}^{*}(x,s), \quad i,j=1,2$$
(15)

As funções que satisfazem as EDPs (15) são denominadas de *soluções fundamentais*. Contudo, sua obtenção é extremamente complexa quando as EDPs estão escritas na forma expressa em (15), uma vez que pode ser verificada uma interdependência entre as componentes de deslocamento, isto é, as EDPs (15) não só são dependentes das derivadas de $\overline{u_1}^*$, mas também derivadas das componentes de deslocamentos nas demais direções, isto é, não existe apenas um único argumento caracterizando a variável das EDPs. Uma das alternativas para suavizar este problema é representar as EDPs acopladas originais em funções potenciais que promovem seu desacoplamento discutidos em Sternberg & Eubanks(1957), Dominguez & Abascal (1984). Nesses trabalhos são descritos esses potenciais e as manipulações algébricas empregadas no problema elastodinâmico no domínio transformado, e essas ferramentas são aplicadas na representação do problema no domínio de Laplace ao longo desta secão deste artigo.

Se a decomposição de Helmholtz, que estabelece que *campos vetoriais solenoidais podem ser compostos por uma soma de potenciais irrotacionais e equivolumiais*, for aplicado aos deslocamentos e às forças, as componentes destes podem ser expressas como:

$$\overline{\boldsymbol{u}}_{i}^{*}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) = \overline{\boldsymbol{f}}_{,i} + \boldsymbol{e}_{ijk}\overline{\boldsymbol{y}}_{k,j} = \overline{\boldsymbol{u}}_{i}^{**d}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{s}) + \overline{\boldsymbol{u}}_{i}^{**r}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{s})$$
(16)

$$\overline{b}_{i}^{*}(q, p, s) = \overline{v}_{,i} + \boldsymbol{e}_{ijk} \overline{\boldsymbol{w}}_{k,j} = \overline{b}_{i}^{*d}(q, p, s) + \overline{b}_{i}^{*r}(q, p, s)$$
(17)

onde $(\overline{f}, \overline{v}), (\overline{y}, \overline{w})$: potenciais irrotacionais, distorcionais.

Se as equações (16) e (17) forem substituídas em (15), essa é desacoplada e pode ser representada por duas outras EDPs em função desses potenciais:

$$\overline{\boldsymbol{f}}_{,ii} - k_1^2 \overline{\boldsymbol{f}} = \overline{\boldsymbol{v}}, \qquad \overline{\boldsymbol{y}}_{i,jj} - k_2^2 \overline{\boldsymbol{y}}_i = \overline{\boldsymbol{w}}_i$$
(18)

onde $k_i = s/c_i$, i = 1, 2.

As equações diferenciais (18) podem ser reunidas num potencial A de forma geral:

$$\overline{A}_{,ii} - k^2 \overline{A} = \overline{a} \tag{19}$$

cuja solução geral pode ser escrita como:

$$A = C_1 K_0(kr) + C_2 I_0(kr) + \frac{\ln r}{2prs^2}$$
(20)

onde K_0 , I_0 : funções de Bessel de primeira e segunda espécies, com ordem zero.

Substituindo-se (20) em (16), os deslocamentos podem ser escritos em função dos potenciais. Em seguida, calculando-se os gradientes desses deslocamentos e utilizando-se as relações constitutivas resultam nas tensões também expressas em função dos potenciais. Com isso, as constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas aplicando as condições de equilíbrio e

ENIECA 2003

IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

de radiação de Sommerfeld no domínio infinito do problema fundamental. A partir de então, a expressão (20) com os coeficientes já determinados pode ser novamente substituída em (16) resultando na forma bem conhecida da solução fundamental em deslocamentos do problema elastodinâmico bidimensional no domínio de Laplace descrita em Cruse & Rizzo(1968):

$$\overline{u}_{ij}^{*}(p,q,s) = \frac{1}{2prc_{2}^{2}h} \left[Xd_{ij} + Yr_{,i}r_{,j} \right]$$
(21)

onde:

$$X = K_0(I_2r) + \frac{1}{I_2r} \left[K_1(I_2r) - \frac{c_2}{c_1} K_1(I_1r) \right]$$
(21a)

$$Y = K_2(I_2r) - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 K_2(I_1r), \qquad I_i = \frac{s}{c_i}, \ i = 1, 2.$$
(21b)

Já a solução fundamental das forças de superfície \overline{p}_{ij}^* pode ser obtida utilizando-se a fórmula de tensão de Cauchy:

$$\overline{p}_{ij}^{*}(p,q,s) = \overline{N}_{ijk}^{*}(p,q,s)\mathbf{h}_{k} = C_{ijkl}\overline{\mathbf{e}}_{ijk}^{*}(p,q,s)\mathbf{h}_{k} = C_{ijkl}\overline{u}_{ijk}^{*}(p,q,s)\mathbf{h}_{k}$$
(22)

A expressão das forças de superfície requer a determinação prévia dos gradientes dos deslocamentos fundamentais; esses podem ser escritos a partir de (21) como:

$$\overline{u}_{ij,k}^{*}(p,q,s) = \frac{\partial \overline{u}_{ij}^{*}}{x_{k}(q)} = \frac{1}{2\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}c_{2}^{2}h} \left[\boldsymbol{d}_{ij}\boldsymbol{r}_{,k} \frac{dX}{dr} - \frac{Y}{r} \left(\boldsymbol{d}_{ik}\boldsymbol{r}_{,j} + \boldsymbol{d}_{jk}\boldsymbol{r}_{,i} \right) + \left(2\frac{Y}{r} - \frac{dY}{dr} \right) \boldsymbol{r}_{,i}\boldsymbol{r}_{,j}\boldsymbol{r}_{,k} \right]$$
(23)

ede:

onde:

$$\frac{dX}{dr} = -\mathbf{I}_2 K_1 (\mathbf{I}_2 r) - \frac{Y}{r}$$
(23a)

$$\frac{dY}{dr} = -I_2 K_1 (I_2 r) - \frac{2}{r} K_2 (I_2 r) + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \left[I_1 K_1 (I_1 r) + \frac{2}{r} K_2 (I_1 r)\right]$$
(23b)

As diferenciações dos tensores fundamentais- que envolvem funções especiais- podem ser feitas utilizando-se conjuntamente a regra da cadeia e uma técnica recursiva de derivação dessas funções especiais. Para detalhes adicionais, vide Anexo.

Se a equação (23) for substituída em (22), a forma explícita de solução $\overline{p_{ii}}$ dada por:

$$\overline{p}_{ij}^{*}(p,q,s) = hC_{ikmt} \frac{\overline{u}_{mj}(p,q,s)}{\partial x_{i}(q)} n_{k} = \frac{1}{2p} \left\{ \left(\boldsymbol{d}_{ij} r_{h} + \boldsymbol{h}_{j} r_{,i} \left(\frac{dX}{dr} - \frac{Y}{r} \right) + \left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} - 2 \right) \left(\frac{dX}{dr} - \frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} \right) \boldsymbol{h}_{i} r_{,j} + 2 \frac{Y}{r} \left(-\boldsymbol{h}_{i} r_{,j} + 2r_{,h} r_{,i} r_{,j} \right) - 2 \frac{dY}{dr} r_{,h} r_{,i} r_{,j} \right\}$$

$$= r \boldsymbol{h}_{..}$$

$$(24)$$

onde $r_{h} = r_{t}h_{t}$

Já as soluções fundamentais para a representação integral dos gradientes de deslocamentos podem expressas a partir da diferenciação das expressões(23) e (24) em relação ao ponto-fonte p, isto é:

$$\overline{u}_{ijk}^{*}(p,q,s) = \frac{\partial \overline{u}_{ij}}{\partial x_{k}(p)} = \frac{-1}{2\mathbf{pr}c_{2}^{2}h} \left[\mathbf{d}_{ij}r_{,k} \left(\frac{dX}{dr} \right) - \frac{Y}{r} \left(\mathbf{d}_{ik}r_{,j} + \mathbf{d}_{jk}r_{,i} \right) + r_{,i}r_{,j}r_{,k} \left(2\frac{Y}{r} - \frac{dY}{dr} \right) \right]$$
(25)
$$\overline{p}_{ijk}^{*}(p,q,s) = \frac{\partial \overline{p}_{ij}^{*}}{\partial x_{k}(p)} = \frac{1}{2\mathbf{p}} \left\{ - \left[\frac{d^{2}X}{dr^{2}} - \frac{1}{r} \left(\frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} \right) \right] \left(\mathbf{d}_{ij}r_{,k}r_{,h} + \mathbf{h}_{j}r_{,i}r_{,k} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{dX}{dr} - \frac{Y}{r} \right) \left(\mathbf{d}_{ij}r_{,k}r_{,h} - \mathbf{d}_{ij}\mathbf{h}_{,k} - \mathbf{d}_{ik}\mathbf{h}_{j} - \mathbf{h}_{j}r_{,i}r_{,k} \right) + \frac{2}{r} \left(\mathbf{d}_{jk}r_{,i}r_{,h} + \mathbf{d}_{ik}r_{,j}r_{,h} + \mathbf{h}_{k}r_{,i}r_{,j} - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,h} \right) \left(\frac{dY}{dr} - 2\frac{Y}{r} \right) + \left[T - \frac{2}{r} \left(\frac{Y}{r} - \frac{dY}{dr} \right) \right] \mathbf{h}_{i}r_{,j}r_{,k} - \left(\frac{c_{i}^{2}}{c_{2}^{2}} - 2 \right) \frac{1}{r} \left(\frac{dX}{dr} - \frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} \right) \mathbf{d}_{jk}\mathbf{h}_{i} + 2\frac{Y}{r^{2}} \left(\mathbf{d}_{,jk}\mathbf{h}_{i} - \mathbf{h}_{i}r_{,j}r_{,k} \right) + 2 \left[\frac{d^{2}Y}{dr^{2}} - \frac{2}{r} \left(\frac{Y}{r} - \frac{dY}{dr} \right) \right] r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{h} \right\}$$
(26)

onde:

$$\frac{d^{2}X}{dr^{2}} = -\frac{1}{r}\frac{dY}{dr} + \frac{Y}{r^{2}} - I_{2}^{2}rK_{0}(I_{2}r) + I_{2}K_{1}(I_{2}r)$$
(26a)
$$\frac{d^{2}Y}{dr^{2}} = I_{2}^{2}rK_{0}(I_{2}r) + 3I_{2}K_{1}(I_{2}r) + \frac{2}{r}\left(2 + \frac{1}{r}\right)K_{2}(I_{2}r) + \left(\frac{c_{1}}{c_{2}}\right)^{2} \left[-I_{1}^{2}rK_{0}(I_{1}r) - 3I_{1}K_{1}(I_{1}r) - \frac{2}{r}\left(2 + \frac{1}{r}\right)K_{2}(I_{1}r) + \right]$$
(26b)

$$T = \left[\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 - 2 \right] \left(-\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} - 2 \frac{Y}{r^2} \right)$$
(26c)

As soluções fundamentais para a representação integral das tensões podem expressas a partir da substituição independente de (25) e (26) em (2), resultando respectivamente em:

$$\overline{d}_{ijk}^{*}(p,q,s) = hC_{ikmt}\frac{\overline{u}_{mj}^{*}(p,q,s)}{\partial x_{t}(p)} = -\frac{1}{2p}\left\{ \left(\boldsymbol{d}_{ij}r_{,k} + \boldsymbol{d}_{jk}r_{,i} \right) \left(\frac{dX}{dr} - \frac{Y}{r} \right) + \left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} - 2 \right) \left(\frac{dX}{dr} - \frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} \right) \boldsymbol{d}_{ik}r_{,j} + 2\frac{Y}{r} \left(-\boldsymbol{d}_{ik}r_{,j} + 2r_{,k}r_{,i}r_{,j} \right) - 2\frac{dY}{dr}r_{,k}r_{,i}r_{,j} \right\}$$
(27)

ENIECA 2003 IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

$$\overline{s}_{ijk}^{*}(p,q,s) = hC_{ikml}p_{mj,l}^{*}(p,q,s) = \frac{rc_{2}^{2}h}{2} \left\{ \left\{ r_{h} \left\{ d_{ik}r_{,j} \left\{ \frac{d}{r} \left(\frac{dY}{dr} - 2\frac{Y}{r} \right) + \left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} - 2 \right) \left[2\frac{d^{2}Y}{dr^{2}} - \frac{d^{2}X}{dr^{2}} + \frac{1}{r} \left(\frac{dX}{dr} + 9\frac{dY}{dr} - 14\frac{Y}{r} \right) + T \right] \right\} + \left(d_{ij}r_{,k} + d_{jk}r_{,j} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dX}{dr} + 3\frac{dY}{dr} - 6\frac{Y}{r} \right) - \frac{d^{2}X}{dr^{2}} \right] + 4r_{j}r_{,j}r_{,k} \left[\frac{d^{2}Y}{dr^{2}} + \frac{1}{r} \left(2\frac{Y}{r} - \frac{dY}{dr} \right) \right] \right\} + \left\{ d_{ik}h_{j} \left\{ \left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} - 2 \right) \left[\frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} - 1 \right) \frac{dY}{dr} - \left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} + 2 \right) \frac{dX}{dr} + \left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} + 3 \right) \frac{Y}{r} \right\} - \frac{d^{2}X}{dr^{2}} \right] + \frac{2}{r} \left(-\frac{dX}{dr} + \frac{Y}{r} \right) \right\} + 2 \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dY}{dr} - \frac{dX}{dr} \right) - \frac{d^{2}X}{dr^{2}} \right] h_{j}r_{j}r_{,k} + \left(h_{i}r_{,j}r_{,k} + h_{k}r_{,r}r_{,j} \right) \left[T + \frac{4}{r} \left(\frac{dY}{dr} - 2\frac{Y}{r^{2}} \right) \right] + \left[\left(\frac{c_{1}^{2}}{c_{2}^{2}} - 2 \right) \left(\frac{dY}{dr} - \frac{dX}{dr} + \frac{Y}{r} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{dX}{dr} - 3\frac{Y}{r^{2}} \right) \right] d_{ik}h_{k} + d_{jk}h_{i} \right) \right] \right\}$$

$$(28)$$

Conclusões

No presente artigo, as equações integrais clássicas de deslocamentos e de tensões da elastodinâmica bidimensional no domínio de Laplace publicadas em 1968 por Cruse & Rizzo e definidas em um sistema de referência global foram adaptadas para um sistema de referência local, com o intuito de facilitar a prescrição de condições de contorno em bordos esconsos, assim como viabilizar o acoplamento de sub-domínios com seus contornos posicionados arbitrariamente no domínio do problema original. Além das equações integrais para deslocamentos e tensões, a representação local é estendida para as equações integrais dos gradientes de deslocamento. Um outro aspecto artigo está relacionado com a obtenção de formas explícitas das soluções fundamentais utilizadas nas representações integrais acima mencionada. Embora tais soluções explícitas já estejam disponíveis na literatura desde 1968 para o caso dos deslocamentos, e parcialmente explícit as para o caso das tensões desde 1988, no presente trabalho foi apresentado uma versão complementar das soluções fundamentais atribuídas a Banerjee e colaboradores publicado em 1988. Além disso, as soluções fundamentais atribuídas a Banerjee e deslocamento.

Referências Bibliográficas

BESKOS, D. E(1986) "Boundary element methods in dynamic analysis". *Applied Mechanics Reviews*, 40,p.1-23 BESKOS, D. E (1997) "Boundary element methods in dynamic analysis: Part II(1986-1996)". *Applied Mechanics Reviews*, 50,(3), p.149-197. BRAVO, M. A; SÁNCHEZ-SESMA F.J.(1990) "Seismic response of alluvial valleys for incident P, SV and

Rayleigh Waves". Soil Dyn. Earthquake Eng. 9, p.16-19.

DRAVINSKY, M (1982) "Scattering of SH waves by an alluvial valley". Journal Eng. Mech. 108, p.19-31.

BOUCHON, M; SCHULTZ, C. A; TOKSOZ, M. N.(1995) "A fast implemention of boundary integral methods to calculate the propagation of seismic waves in laterally varying layered media". *Bull. Seism. Soc. Am.* 85, p.1679-1687.

CRUSE, T. A, RIZZO, F. J. (1968) "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem", *I. J. Math. Anal. Appl.*, 22, p.244-59.

CRUSE, T. A (1968) "A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, II". *J. Math. Anal. Appl.*, 22, p.341-55.

DOMINGHEZ, J; ABASCAL, R.(1984) "On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity". *Eng. Anal.*, 1(3), p.128-134.

DURBIN, F.(1974) "Numerical inversion of Laplace transform: an efficient improvement to Dubner and Abate's Method". *Computer Journal*, 17, p.371-76.

KOBAYASHI, S; NISHIMURA, N. (1982) "Trasient stress analysis of tunnels and caverns of arbitrary shape due to travelling waves". In: *Developments in boundary element methods-2*, P.K. Banerjee & R. P. Shaw (Eds). Applied Science, London, p.177-210.

AHMAD S, BANERJEE P.K. (1988) "Multi-domain BEM for two-dimensional problems of Elastodynamics". *International J. Num. Meth. Engineering*; 26, pp.891-911.

MANOLIS, G. D. (1983) "A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics". *Int. J. Num. Meth. Engng*, 19, p.73-91.

MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E.(1981) "Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace Transform". *Int. J. Num. Meth. Engng*, 17, p.573-599.

MANOLIS, G. D; BESKOS, D. E.(1983) "Dynamic response of lined tunnels by isoparametric boundary element method". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 36, p.291-307.

MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E.(1988) Boundary element method in elastodynamics. London: Uniwin Hyman Ltd.

MOSSESSIAN, T.K; DRAVINSKY, M(1989) "Scattering of the elastic waves by three-dimensional surface topographies". *Wave Motion*,11, p.579-92.

NIWA, Y; KOBAYASHI, S; AZUMA, N.(1975) "An Analysis of transient stresses produced around cavities of arbitrary shape during the passage of traveling waves". *Memoires Fac. Eng. Kyoto Univ.*, 37, p.28-46.

PAPOULIS, A.(1957) "A new method of inversion of the Laplace transform". *Quart. Appl. Math., 14*, p.405-414.

SANCHEZ-SESMA, F. J; ESQUIVEL, J, A (1979) "Ground motion on alluvial valleys under Incident plane SH waves". *Bull. Seismol. Soc. Am.* 69, p.1107-20.

SANCHEZ-SESMA, F. J; ROSENBLUETH, E, (1979) "Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident plane SH waves". *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 7, p.441-50.

STERNBERG, E; EUBANKS, R. A. (1957) "On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation". *Quart. Applied Math.*, 15.

WONG, H. L.(1982) "Effect of the surface topography on the diffraction of P, SV, and Rayleigh Waves". Bull. Seismol. Soc. Am., 72, p.1167-83.

Anexo

A diferenciação de (21) no ponto-campo pode ser escrita como:

$$\overline{u}_{ij,k}^{*}(p,q,s) = \frac{\partial \overline{u}_{ij}^{*}}{\partial x_{k}(q)} = \frac{1}{2\mathbf{pr}c_{2}^{2}h} \left[\mathbf{d}_{ij} \frac{dX}{dr} \frac{dr}{dx_{k}(q)} - r_{j}r_{j} \frac{dY}{dr} \frac{dr}{dx_{k}(q)} - Y \frac{d(r_{j}r_{j})}{dx_{k}(q)} \right]$$
(A.1)

onde:

$$\frac{dr}{dx_k(q)} = \frac{x_k(q) - x_k(p)}{r} = r_k$$
(A.1.a)

O cálculo da última parcela em (A.1) pode ser efetuado como:

$$\frac{d(r_i,r_{j})}{dx_k(q)} = r_{j} \frac{d}{dx_k(q)} \left[\frac{x_j(q) - x_j(p)}{r} \right] + r_{j} \frac{d}{dx_k(q)} \left[\frac{x_i(q) - x_i(p)}{r} \right]$$
(A.2)

Aplicando-se a regra da cadeia em (A.2) e a definição dada em (A.1.a), vem:

IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

$$\frac{d(r_{i}r_{j})}{dx_{k}(q)} = \frac{1}{r} \left(\boldsymbol{d}_{ik} r_{j} + \boldsymbol{d}_{jk} r_{i} - 2r_{i}r_{j}r_{k} \right)$$
(A.3)

Substituindo-se (A.3), (A.1.a) em (A.1) tem-se a expressão dada em (23). Contudo, sua forma explícita ainda requer a obtenção de dX/dr = dY/dr, que dependem da diferenciação das funções de Bessel K_n . Essas possuem a seguinte propriedade recursiva:

$$K_{n+1}(y) = K_{n-1}(y) + 2n/yK_n(y)$$
(A.4)

onde y : argumento.

Além disso, outra propriedade para diferenciação de K_n pode ser escrita:

$$d[y^{-n}K_{n}(y)]/dy = -y^{-n}K_{n+1}(y)$$
(A.5)

A partir de (A.5) e (A.4), tem-se as seguintes relações de interesse:

$$\frac{d}{dr}K_0(\boldsymbol{b}r) \equiv \boldsymbol{b}\frac{d}{d\boldsymbol{b}r}K_0(\boldsymbol{b}r) = -\boldsymbol{b}K_1(\boldsymbol{b}r)$$
(A.6.a)

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}K_{1}(\boldsymbol{b}r)\right] \equiv \boldsymbol{b}^{2}\frac{d}{d\boldsymbol{b}r}\left[\frac{1}{\boldsymbol{b}r}K_{1}(\boldsymbol{b}r)\right] = -\frac{\boldsymbol{b}K_{2}(\boldsymbol{b}r)}{r}$$
(A.6.b)

$$\frac{d}{dr}[K_2(\boldsymbol{b}r)] \equiv \boldsymbol{b} \frac{d}{d\boldsymbol{b}r} \left[K_2(\boldsymbol{b}r) + \frac{2}{\boldsymbol{b}r} K_1(\boldsymbol{b}r) \right] = -\boldsymbol{b}K_1(\boldsymbol{b}r) - \frac{2K_2(\boldsymbol{b}r)}{r}$$
(A.6.c)

onde **b** : constante arbitrária.

Substituindo-se (A.6.a,b) em (21a) e (A.6.c) em (21b), obtém-se respectivamente (23a) e (23b). No caso das soluções fundamentais dos gradientes de deslocamentos e tensões no ponto-fonte p deve-se efetuar-se as diferenciais em relação a esse ponto:

$$\frac{dr}{dx_k(p)} = -\frac{dr}{dx_k(q)} = -r_k \tag{A.7}$$

Assim $u_{ijk}^* = \frac{\partial \overline{u}_{ij}^*}{\partial x_k(p)} = -\frac{\partial \overline{u}_{ij}^*}{\partial x_k(q)}$ conduz a expressão dada em (25). O cálculo do

gradiente de \overline{p}_{ij}^* pode ser efetuado como:

$$\overline{p}_{ijk}^{*} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_{k}(p)} = \frac{1}{2p} \left\{ \left(\mathbf{d}_{ij}r_{h} + \mathbf{h}_{j}r_{i} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{dX}{dr} - \frac{Y}{r} \right) - r_{,k} \right\} + \left(\frac{dX}{dr} - \frac{Y}{r} \right) \frac{d}{dx_{k}(p)} \left(\mathbf{d}_{ij}r_{,h} + \mathbf{h}_{j}r_{,i} \right) + \left(\frac{c_{i}^{2}}{c_{2}^{2}} - 2 \right) \left[\left(\frac{dX}{dr} - \frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} \right) \frac{d}{dx_{k}(p)} \left(\mathbf{h}_{i}r_{,j} \right) + \mathbf{h}_{i}r_{,j} \frac{d}{dr} \left(\frac{dX}{dr} - \frac{dY}{dr} - \frac{Y}{r} \right) - r_{,k} \right) \right] + 2 \left[\frac{d}{dx_{k}(p)} \left(-\mathbf{h}_{i}r_{,j} + 2r_{h}r_{,i}r_{,j} \right) + \left(-\mathbf{h}_{i}r_{,j} + 2r_{,h}r_{,i}r_{,j} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{Y}{r} \right) - r_{,k} \right) \right] + 2 \left[-r_{,h}r_{,i}r_{,j} \frac{d^{2}Y}{dr^{2}} \left(-r_{,k} \right) - \frac{dY}{dr} \frac{d}{dx_{k}(p)} \left(r_{,h}r_{,i}r_{,j} \right) \right] \right] \right\}$$
(A.8)

IV ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E A RQUITETURA

onde as diferenciações são dadas por:

$$\frac{d}{dx_k(p)} \left(\boldsymbol{d}_{ij} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{h}} \right) = -\frac{\boldsymbol{d}_{ij}}{r} \left(\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{r}_{,k} \right)$$
(A.8.a)

$$\frac{d}{dx_k(p)} \left(\boldsymbol{h}_j r_i \right) = -\frac{\boldsymbol{h}_j}{r} \left(\boldsymbol{d}_{ik} - r_i r_{,k} \right)$$
(A.8.b)

$$\frac{d}{dx_k(p)}(r_{,i}r_{,j}r_{,h}) = -\frac{1}{r} \left[\left(\boldsymbol{d}_{jk}r_{,i} + \boldsymbol{d}_{ik}r_{,j} \right) r_{h} + \boldsymbol{h}_k r_{,i}r_{,j} - 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{h} \right]$$
(A.8.c)

Substituindo-se (A.8.a,b,c) em (A.8) e reagrupando-se convenientemente os termos, a forma expressa em (26) é obtida. As soluções fundamentais para a representação integral das tensões podem ser obtidas analogamente às dos gradientes de deslocamentos. Com intuito de fazer uma concisão no texto deste artigo, apenas breves comentários serão efetuados nos procedimentos intermediários de obtenção das expressões (27) e (28).

O tensor $\overline{d}_{ijk}^* = hC_{ikmt}\partial\overline{u}_{mj}^*/\partial x_t(p)$ pode ser obtido seguindo-se boa parte das etapas de \overline{p}_{ij}^* , devendo-se ficar alerta quanto à mudança de sinal devido à diferenciação em relação ao ponto-fonte. Já para o cálculo de $\overline{s}_{ijk}^* = hC_{ikmt}\partial\overline{p}_{mj}^*/\partial x_t(p)$ deve-se proceder analogamente à obtenção de \overline{p}_{ij}^* .