

ANÁLISE DE SAPATA DE FUNDAÇÃO PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Bolsista: Márcia Regina Lima Rizzo

Orientador: Fábio Armando Botelho Cordovil
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

RESUMO

A sapata é uma fundação rasa, executada em concreto armado, que comprime diretamente o solo onde se apóia. O solo desenvolve uma ação reativa distribuída na superfície inferior da sapata. Solo e elemento de fundação trabalham em conjunto sendo estudados como um sistema estrutural único. A interação solo-fundação é complexa, o diagrama real das pressões de contato não é conhecido para todas as situações, logo se adotam hipóteses que conduzam aos melhores resultados. Nos exemplos se estudou o comportamento da sapata com dados relativos ao solo, sendo que a base em contato com o solo foi considerada uma placa e o solo um meio elástico contínuo com coeficiente de proporcionalidade linear. Os resultados dos três exemplos resolvidos pelo MDF (Método das Diferenças Finitas) foram comparados aos obtidos com programa baseado no MEF (Método dos Elementos Finitos) - SAP 2000. No EXEMPLO 1, o resultado de M_x no ponto w15, situado na face do pilar, resulta pelo MDF o valor de 90,98 kN cm e no MEF o valor de 99,70 kN cm. Essa proximidade nos valores de momento ressalta a confiabilidade dos processos usados. O uso do MDF na área de projetos constitui vantagem pela sua simplicidade. Os EXEMPLOS 2 e 3 diferem na discretização da malha. Para o ponto w10 e malha $(30 \times 30) \text{ cm}^2$ o valor do M_x no ponto situado na face do pilar resultou no MDF 85,55 kN cm e no MEF 88,45 kN cm. O mesmo ponto para malha de $(15 \times 15) \text{ cm}^2$ resultou os valores de 85,98 kN cm no MDF e 86,06 kN cm no MEF. A discretização de $(15 \times 15) \text{ cm}^2$ oferece resultados mais próximos entre os métodos, mas desprende duas vezes mais trabalho. A diferença nos resultados é irrelevante no dimensionamento de estruturas usuais tornando-se desnecessário no cotidiano o uso de uma malha muito refinada.

INTRODUÇÃO

Entende-se por fundação um elemento estrutural que transmite ao solo as cargas aplicadas à estrutura e as que decorrem de seu peso próprio. A sapata constitui uma fundação rasa executada em concreto armado que exerce uma ação de compressão diretamente sobre o solo onde se apóia. O solo trabalha em conjunto com o elemento de fundação, desenvolvendo uma ação reativa que se distribui por toda a superfície inferior da sapata, devendo ser estudado como um sistema estrutural único. O diagrama real das pressões de contato não é plenamente conhecido para todos os casos práticos. Por ser complexa a interação solo-fundação adota-se hipóteses que conduzam a resultados os mais próximos possíveis da realidade.

OBJETIVOS

Estudar o efeito da deformação conjunta do elemento estrutural de fundação, sapata rasa, e o solo onde essa fundação direta se apóia. Os parâmetros analisados são os valores dos deslocamentos do conjunto e dos esforços internos da sapata. A solução é obtida usando-se o método das diferenças finitas e os resultados são comparados aos resultados obtidos com um programa baseado nas equações de elementos finitos.

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O Método das diferenças finitas (MDF) é uma das técnicas numéricas que pode ser aplicada para modelar alguns problemas de placas, inclusive em estruturas de fundações como as sapatas rasas, e é acessível aos alunos da graduação. Este método quando aplicado às placas transforma a equação diferencial da superfície elástica em outra equação de diferenças finitas, ou seja, substitui as derivadas por quocientes entre intervalos finitos. Dessa forma a equação diferencial da elástica se transforma em um sistema de equações lineares algébricas com várias incógnitas em cada equação. Essas incógnitas são os deslocamentos da estrutura deformada. A solução deste sistema de equações lineares fornece os deslocamentos da estrutura que por meio das equações de diferenças finitas permite obter esforços internos como o momento de flexão, o esforço cortante e a torção.

Nas equações das diferenças finitas representam-se as derivadas por meio de expressões aproximadas, mediante o emprego de polinômios de interpolação. As derivadas do polinômio de interpolação, são consideradas iguais as derivadas da função que se pretende substituir pelas diferenças finitas.

TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

Todas estruturas planas onde duas de suas dimensões são preponderantes sobre a terceira, dita espessura e esta é submetida a um carregamento ortogonal a sua superfície média, ela passa a ser chamada placa. Quando a espessura é menor que 1/5 do menor dos vãos e maior que um 1/100 deste, admite-se que a placa é esbelta.

No estudo de uma placa esbelta tanto o comportamento físico como geométrico são considerados lineares e segundo Kirchhoff valem as seguintes hipóteses simplificadoras:

- a) o plano médio é um plano neutro, ou seja, está isento de tensões e, após o equilíbrio, gera a superfície elástica $w_{(i,j)}$, que é a incógnita principal no estudo das placas;
 - b) os pontos situados em uma normal ao plano médio antes da deformação estarão em uma normal à superfície elástica após o equilíbrio;
 - c) cálculo das deformações despreza-se a tensão s_z que atua na direção do eixo z.
- Atuam na placa os momentos fletores calculados pelas equações dadas abaixo:

$$Mx_{(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} \right] \quad (1.0)$$

$$My_{(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} \right] \quad (2.0)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-n^2)} \quad (3.0)$$

onde: h - espessura da placa,
 E - módulo de elasticidade do matéria,l
 n - o coeficiente de Poisson,
 D - representa a rigidez da placa a flexão.

Portanto as derivadas dos coeficientes das equações (1.0) e (2.0) são dadas por:

$$\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta^2} (w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) \quad (4.0)$$

$$\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta^2} (w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}) \quad (5.0)$$

$w_{i-1,j}$, $w_{i,j}$, $w_{i+1,j}$, $w_{i,j-1}$, $w_{i,j+1}$, são determinados pelo método das diferenças finitas para sistemas bidimensionais como sendo os deslocamentos dos pontos discretos de uma placa.

DIFERENÇAS FINITAS EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

Nos sistemas bidimensionais o equacionamento é representado por uma equação diferencial biarmônica dada por $w = w_{(x,y)}$, podendo também ser expresso pelo laplaciano de quarta ordem $\nabla_{(x,y)}^4$ como mostra a expressão 6.0:

$$\nabla_{(x,y)}^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (6.0)$$

Expressando cada parcela da equação acima em diferenças finitas, os intervalos Δx e Δy podem ser considerados iguais ou diferentes. Se iguais, a malha é quadrada; se diferentes, a malha é dita retangular. Considerando apenas a malha quadrada tem-se:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta \quad (7.0)$$

Sendo cada parcela da expressão (7.0) representada pelos pesos dos coeficientes, a figura 1 mostra a soma das parcelas que resulta em uma “molécula” para a malha quadrada:

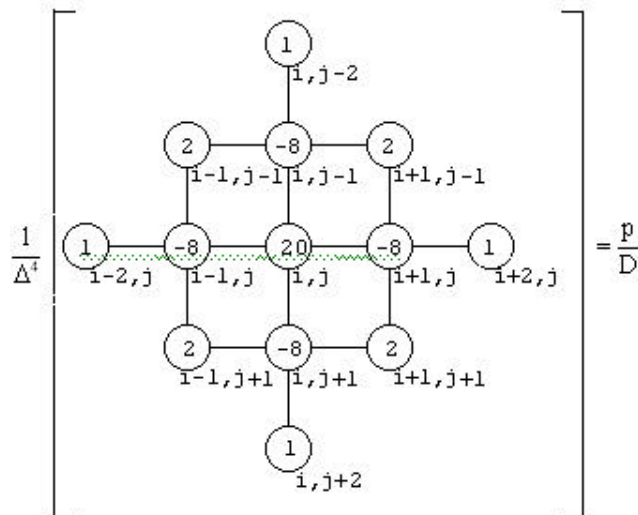


Figura 1: Molécula para malha quadrada

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO: SAPATA DE FUNDAÇÃO

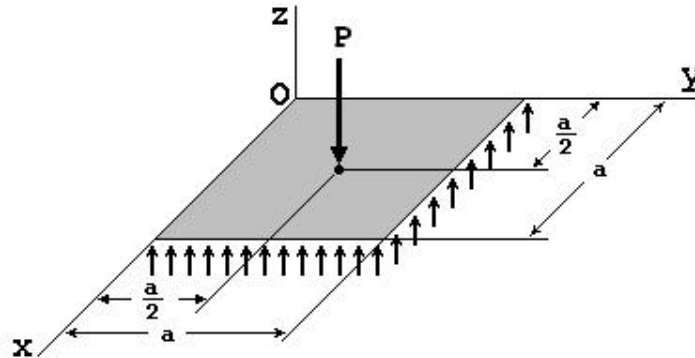


Figura 2: Estrutura genérica

EXEMPLO 1:

A estrutura de fundação da figura abaixo é composta pelo pilar P_1 , com dimensões de 20x20 cm e carga de 600 kN, apoiado numa sapata de dimensões 180x180 cm e 15 cm de espessura. Adotam-se os seguintes dados de projeto: resistência do concreto à compressão: $f_k = 2 \text{ kN/cm}^2$; $E_c = 2900 \text{ kN/cm}^2$; coeficiente de Poisson: $\nu = 0,2$; coeficiente de proporcionalidade do solo: $k_s = 0,04 \text{ kN/cm}^3$.

Para discretizar a estrutura de placa foi adotada uma malha com $\Delta = 20 \text{ cm}$:

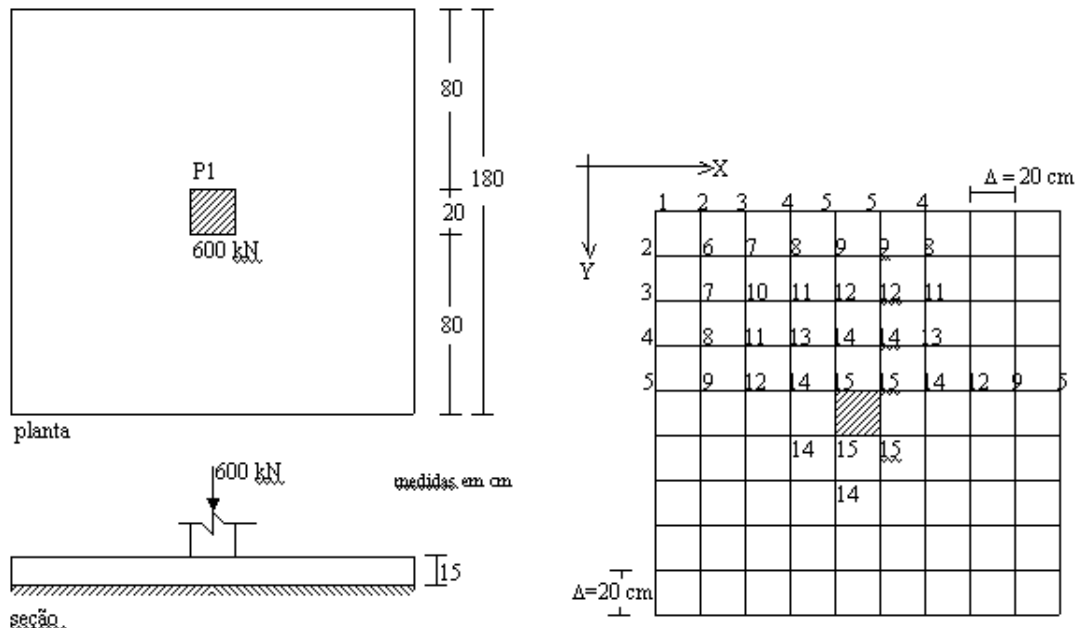


Figura 3: Sapata com pilar centrado e discretização da malha

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Cálculo dos parâmetros:

$$\Delta^4 = 160000 \text{ cm}^4; D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} = 849609,375 \text{ kN.cm} ; \frac{\Delta^4}{D} = 0,188321839 \frac{\text{cm}^3}{\text{kN}}$$

Como carga distribuída será considerado apenas o peso próprio da estrutura de concreto armado, peso específico de 25 kN/m^3 . $p_c = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000000 \text{ cm}^3} \cdot 15 \text{ cm} \therefore$

$p_c = 0,000375 \text{ kN/cm}^2$ que resulta $\frac{\Delta^4}{D} p_c = \frac{60}{D}$. A parcela de carregamento correspondente à reação do solo, $k_s y_i$, que atua de baixo para cima, por isso negativa, é somada às ações do peso próprio da sapata em todos os pontos da placa; $\frac{\Delta^4}{D} k_s y_i = 0,0075 y_i$. Quando se tratar do ponto 15, se soma a essa parcela mencionada também à quarta parte da carga do pilar

divididos por Δ^2 . Logo $w_{15} = \frac{\Delta^4}{D} \cdot \frac{150}{\Delta^2} = \frac{60000}{D}$.

Resolvendo o sistema de 15 equações com 15 incógnitas, resultam os deslocamentos:

Tab. 1 – Resumo dos deslocamentos

	w5	w9	w12	w14	w15
Desloc. (cm)	0,4313	0,4755	0,5231	0,56996	0,60566

Para se calcular os momentos fletores em um ponto qualquer (i,j) utiliza-se expressões do tipo:

$$M_{x(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} \right] \text{ ou } M_{y(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} \right]$$

Tab. 2 - Resumo dos momentos fletores entre os pontos de deslocamentos w5 e w15

	w5	w9	w12	w14	w15
M_x (kN cm)	0	0,03	10,39	35,21	90,98

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Optando pelo programa SAP 2000, o EXEMPLO 1 foi resolvido a partir das considerações de cálculo apresentadas a seguir:

- Devido ao carregamento ser elevado, desconsiderou-se o peso próprio da sapata.
- O elemento adotado para discretizar a estrutura é o elemento Thick Plate, que é uma variação do elemento Shell.
- Considerando que esta estrutura se apóia sobre uma base elástica, o apoio desta no solo será através de molas onde o coeficiente de rigidez da mola K_m é dado pela expressão $K_m = K_s \cdot \Delta^2$ onde K_s é o coeficiente de proporcionalidade do solo e Δ a variação da malha. Neste caso tem-se $K_m = 0,04 \cdot 20^2$, $K_m = 16$.

- A carga do pilar foi considerada concentrada nos nós da malha discretizada.

Sendo assim:

Tab. 1 – Resumo dos deslocamentos

	w5	w9	w12	w14	w15
Desloc.(cm)	0,3438	0,3943	0,4476	0,4995	0,5396

Tab. 2 - Resumo dos momentos fletores entre os pontos de deslocamentos w5 e w15

	w5	w9	w12	w14	w15
M_x (kN cm)	-1,5	1,5	12,5	38,63	99,70

EXEMPLO 2:

Considerando as mesmas variáveis de projeto do exemplo 1, mas adotando novas dimensões para a sapata e pilares assim como para o carregamento tem-se a estrutura de fundação da figura abaixo. Pilar P1 com dimensões de 30 x 30cm, carga de 700kN, apoiado na sapata com dimensões de 210 x 210cm e espessura 15 cm.cuja, resistência do concreto à compressão: $f_{ck} = 2\text{kN/cm}^2$; $E_c = 2900 \text{ kN/cm}^2$; coeficiente de Poisson: $\nu = 0,2$; coeficiente de proporcionalidade do solo: $k_s = 0,04\text{kN/cm}^3$.

Na estrutura de placa da figura seguinte foi adotada na discretização uma malha com $\Delta = 30 \text{ cm}$:

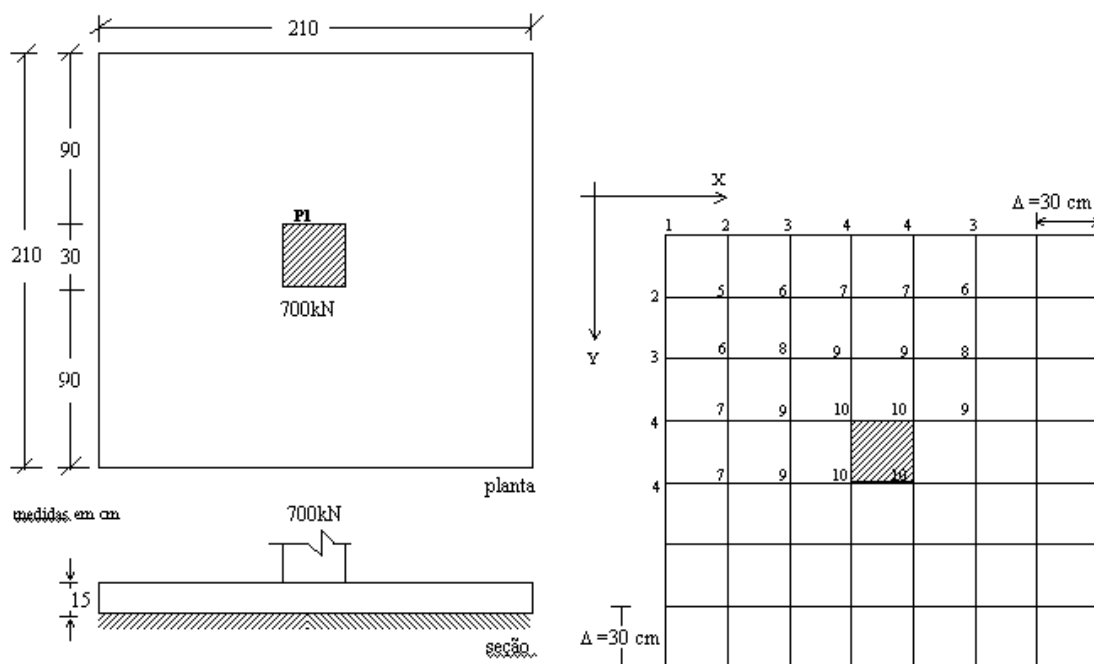


Figura 4: Sapata com pilar centrado e discretização da malha

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Cálculo dos parâmetros:

$\Delta^4 = 810000 \text{ cm}^4$; $\frac{\Delta^4}{D} = 0,95337931045 \text{ cm}^3/\text{kN}$. ; o peso próprio da estrutura de concreto armado, com peso específico igual a 25 kN/m^3 , será a única carga distribuída considerada: $p_c = 0,000375 \text{ kN/cm}^2$ e a parcela de carregamento correspondente à reação do solo, $k_s y_i$, que atua de baixo para cima, por isso negativa, é somada às ações do peso próprio da sapata em todos os pontos da figura acima. $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 849609,375$:

$$\frac{\Delta^4}{D} p_c = \frac{810000}{D} \cdot 0,000375 = \frac{303,75}{D}; \frac{\Delta^4}{D} k_s y_i = 0,0381 w_i.$$

Quando se tratar do ponto 10, a parcela mencionada é somada também à carga do pilar, sendo assim; $w_{10} = \frac{157500}{D} + \frac{303,75}{D} = \frac{157803,75}{D}$

Resolvendo o sistema de 10 equações com 10 incógnitas, resultam os deslocamentos:

Tab. 1 – Resumo dos deslocamentos

	w_4	w_7	w_9	w_{10}
M(kN.cm)	0,3430	0,42639	0,516283	0,591807

Para se calcular os momentos fletores em um ponto qualquer (i,j) utiliza-se expressões do tipo:

$$M_{x(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} \right] \text{ ou } M_{y(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} \right]$$

Tab. 2 - Resumo dos momentos fletores entre os pontos de deslocamentos w_4 e w_{10}

	w_4	w_7	w_9	w_{10}
M(kN.cm)	0	1,64103	23,9651	85,55

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Optando pelo programa SAP 2000, o EXEMPLO 1 foi resolvido a partir das considerações de cálculo apresentadas a seguir:

- Devido ao carregamento ser elevado, desconsiderou-se o peso próprio da sapata.
- O elemento adotado para discretizar a estrutura é o elemento Thick Plate, que é uma variação do elemento Shell.
- Considerando que esta estrutura se apoia sobre uma base elástica, o apoio desta no solo será através de molas onde o coeficiente de rigidez da mola K_m é dado pela expressão $K_m = K_s \cdot \Delta^2$ onde K_s é o coeficiente de proporcionalidade do solo e Δ a variação da malha. Neste caso tem-se $K_m = 0,04 \cdot 20^2$, $K_m = 16$.

- A carga do pilar foi considerada concentrada nos nós da malha discretizada.
Sendo assim:

Tab. 1 – Resumo dos deslocamentos

	w₄	w₇	w₉	w₁₀
Desloc.(cm)	0,1706	0,2577	0,3493	0,4235

Tab. 2 - Resumo dos momentos fletores entre os pontos de deslocamentos w4 e w10

	w₄	w₇	w₉	w₁₀
M(kN.cm)	-3,80	1,60	24,03	88,45

EXEMPLO 3:

Para a estrutura do exemplo anterior e os mesmos dados de projeto, o cálculo foi feito utilizando uma outra discretização. A figura abaixo mostra uma malha em que $\Delta = 15\text{cm}$.

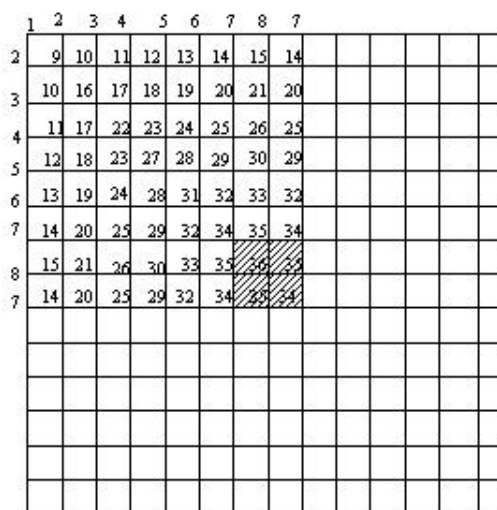


Figura 5: Discretização da malha de (15x15)cm

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Cálculo dos parâmetros:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} = 849609,375 \text{ kN.cm} ; \frac{\Delta^4}{D} = 0,05959 \text{ cm}^3/\text{kN}, \text{ o peso próprio da}$$

estrutura de concreto armado, com peso específico igual a 25 kN/m^3 , será a única carga distribuída considerada: $p_c = 0,000375 \text{ kN/cm}^2$ e a parcela de carregamento correspondente à reação do solo, $k_s y_i$, que atua de baixo para cima, por isso negativa, é somada às ações do peso próprio da sapata em todos os pontos da figura acima $\frac{\Delta^4}{D} p_c = \frac{50625}{D} \cdot 0,000375 = \frac{18,984375}{D}$; $\frac{\Delta^4}{D} k_s y_i = 0,002383 w_i$. Quando se tratar do ponto 34, 35, 36, a parcela mencionada é somada também à carga do pilar.

Sendo assim; $w_{34} = \frac{4375}{D} + \frac{18,984375}{D} = \frac{4393,984375}{D}$, w_{35}

$$= \frac{17500}{D} + \frac{18,984375}{D} = \frac{17518,984375}{D}; w_{36} = \frac{70000}{D} + \frac{18,984375}{D} = \frac{70018,984375}{D}.$$

Resolvendo o sistema de 36 equações com 36 incógnitas, resultam os deslocamentos:

Tab. 1 – Resumo dos deslocamentos

Desl.(cm)	0,33749	0,37916	0,42309	0,46875	0,51439	0,5567c	0,58994

Para se calcular os momentos fletores em um ponto qualquer (i,j) utiliza-se expressões do tipo:

$$M_{x(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} \right] \text{ ou } M_{y(i,j)} = -D \left[\frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(i,j)}}{\partial x^2} \right]$$

Tab. 2 - Resumo dos momentos fletores entre os pontos de deslocamentos w7 e w34:

M(kN.cm)	0	-1,533	1,348	9,100	23,209	46,905	85,980

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Optando pelo programa SAP 2000, o EXEMPLO 3 foi resolvido a partir das considerações de cálculo apresentadas a seguir:

- Devido ao carregamento ser elevado, desconsiderou-se o peso próprio da sapata.
- O elemento adotado para discretizar a estrutura é o elemento Thick Plate, que é uma variação do elemento Shell.
- Considerando que esta estrutura se apóia sobre uma base elástica, o apoio desta no solo será através de molas onde o coeficiente de rigidez da mola K_m é dado pela expressão $K_m = K_s * \Delta^2$ onde K_s é o coeficiente de proporcionalidade do solo e Δ a variação da malha. Neste caso tem-se $K_m = 0,04 * 15^2$, $K_m = 9$.
- A carga do pilar foi considerada concentrada nos nós da malha discretizada.

Sendo assim:

Tab. 1 – Resumo dos deslocamentos

Desl.(cm)	0,2915	0,3349	0,3803	0,4270	0,4732	0,5155	0,5497

Tab. 2 - Resumo dos momentos fletores entre os pontos de deslocamentos w7 e w34

M(kN.cm)	-1,9	0,01	3,22	11,70	26,34	52,90	86,06

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO

Com base no método das diferenças finitas e no método dos elementos finitos, três exemplos foram analisados para comparar a eficiência dos resultados obtidos entre eles.

No exemplo 1, a partir de uma malha de 20x20 cm², foram obtidos valores de deslocamentos que variam de aproximadamente 1mm, ou seja, como estes valores são bastante próximos, principalmente quando comparado com as dimensões da sapata, este indica que estas variações são valores residuais conseqüentes de um processo de cálculo numérico.

No exemplo 2, considerando as mesmas condições de projeto do exemplo 1, as dimensões da sapata, o carregamento e a discretização passaram respectivamente de 180x180cm², 600KN, 20x20cm² para 210x210cm², 700KN, 30x30cm² com objetivo de verificar a variação dos resultados obtidos entre os métodos para o deslocamento. Observou-se que para uma sapata de dimensões maiores e uma malha adotada também maior, a comparação dos resultados mostrou uma variação de aproximadamente 2mm ou seja, os valores residuais aumentaram quando comparados com o do exemplo anterior, no entanto, os resultados do deslocamento ainda são considerados próximos o suficiente para confirmar a proximidade dos resultados obtidos entre os métodos.

No exemplo 3, foram consideradas as mesmas variáveis do exemplo 2 porém a malha considerada passou de 30x30cm² para 15x15cm² resultando para o deslocamento uma variação aproximada de 0,5mm. Um refinamento na malha conduz a valores mais próximos entre os métodos, confirmando juntamente com os demais exemplos os resultados obtidos independente do método aplicado.

Outra maneira de avaliar os resultados obtidos é através dos valores de momentos fletores. Considerando o exemplo 1, o resultado de M_x no ponto w15, é de 90,98 kN.cm para o MDF e de 99,70 KN.cm para o MEF, para exemplo 2, o resultado de M_x no ponto w10, é de 90,98 kN.cm para o MDF e de 99,70 KN.cm para o MEF, o mesmo ponto para uma malha de 15x15 cm resultou os valores de 85,98 kN cm no MDF e 86,06 kN cm no MEF. Os resultados analisados através dos momentos fletores também confirmam os resultados dos cálculos independentem do método aplicado.

Sendo assim, os resultados obtidos ressaltam a confiabilidade dos processos usados concluindo que estes valores são próximos aos reais pois houve convergência dos resultados numéricos

É interessante observar que apesar da discretização de 15x15 cm oferecer resultados mais próximos entre os métodos, esta desprende duas vezes mais trabalho do que a discretização de 30x30 cm. Como a diferença nos resultados obtida para o momento fletor é praticamente irrelevante para o dimensionamento usual da estrutura, conclui-se que é desnecessário no cotidiano do cálculo de esforço de momento fletor o uso de uma malha muito refinada

BIBLIOGRAFIA:

- BARATA, F.E. (1984). Propriedades mecânicas dos solos. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos.
- BARBOSA, R.M. (1970). Cálculo das diferenças finitas. São Paulo, Nobel.
- CAPUTO, H.P. (1987). Mecânica dos solos e suas aplicações. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos.
- CORDOVIL, F.A.B. (1997). Projeto de lajes -cogumelo mistas. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 28. São Carlos, 1997, Anais. São Carlos, JORNADAS, v.4, p. 1505-1514.
- MORAES, M.C. (1976). Estruturas de fundações. São Paulo, McGraw-Hill.
- PINI (1998). Fundações: teoria e prática. São Paulo, Pini.
- SANTOS, M. (1987). Contribuição ao projeto de fundações em radier. Tese de mestrado. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ.
- TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). Theory of plates and shells. London, McGraw-Hill.
- TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). Theory of elasticity. London, McGraw-Hill.

DADOS:

Orientador: Fábio Armando Botelho Cordovil

e-mail: facordovil@uem.br

Bolsista: Márcia Regina Lima Rizzo

e-mail: rizzomarcia@hotmail.com / marciarlr@uol.com.br