CONSIDERAÇÕES SOBRE PLANEJAMENTO E ANÁLISE DE EXPERIMENTOS FATORIAIS FRACIONÁRIOS ASSIMÉTRICOS – EXEMPLO DE APLICAÇÃO A UM CASO DE INFRA-ESTRUTURA DE TRANSPORTES

Jisela Aparecida Santanna-Greco
Glauco Tulio Pessa Fabbri
Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos

RESUMO
Apresentam-se técnicas de planejamento e análise de experimentos fatoriais fracionários assimétricos, ou seja, com fatores em níveis variados. Fatores com mais de dois níveis de variação são acomodados em planejamentos fatoriais em dois níveis, artifício utilizado visando a simplificação da montagem e da análise dos experimentos. O objetivo do fracionamento de experimentos é a redução do número de condições experimentais a serem testadas. Para validação da técnica introduzida, utilizou-se como exemplo ilustrativo parte de um estudo referente à determinação dos fatores interferentes no coeficiente de atividade de solos finos. Foi realizada uma comparação dos resultados fornecidos pelo experimento completo com os resultados obtidos através da redução do número de condições experimentais à metade. As respostas fornecidas pelos experimentos completo e fracionado foram concordantes.

1. INTRODUÇÃO
A realização de experimentos envolvendo um número crescente de fatores tem se tornado comum não só na área de pavimentação, mas em quase todas as áreas da engenharia. Como cada fator pode possuir vários níveis de variação e como o número de condições experimentais a serem testadas em um experimento fatorial é dado por todas as combinações possíveis dos diversos níveis dos fatores ou variáveis que o constituem, a realização do experimento completo pode tornar-se impraticável.

Surge então a necessidade do fracionamento do experimento, que permite que as informações desejadas sejam obtidas realizando-se apenas uma fração do experimento total, com base na redundância existente quando muitos fatores são introduzidos. Através da aplicação da técnica de planejamento e análise de experimentos fatoriais fracionários, o número de condições experimentais necessárias à obtenção da resposta desejada pode ser reduzido, fazendo-se uso do sistema de acoplamento de efeitos, que baseia-se na consideração de que interações de alta ordem podem ser desconsideradas.

Apresentam-se em seguida uma revisão bibliográfica sobre planejamento e análise de experimentos fatoriais fracionários e um exemplo ilustrativo do procedimento de fracionamento aplicado a um problema típico da área de infra-estrutura de transportes. Para validação da técnica apresentada é feita uma comparação dos resultados obtidos através da realização de um experimento completo com os resultados obtidos através da realização do experimento fracionado.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Planejamento e análise de experimentos fatoriais
Experimentos fatoriais são aqueles que consideram todas as combinações possíveis dos diversos níveis das variáveis independentes ou fatores que o constituem, com o objetivo de identificar as razões de variação da resposta ou variável de saída. Os níveis de um fator correspondem aos valores que este fator pode assumir durante a experimentação.

A aplicação de técnicas de planejamento e análise de experimentos fatoriais permite a avaliação dos efeitos dessa variação simultânea, através da determinação dos efeitos principais e dos efeitos de interação entre os fatores. O efeito principal de um fator corresponde ao valor médio do gradiente de mudança de resposta produzido pela mudança no nível do fator, mantendo-se os demais fatores constantes (CARPINETTI, 2000). Os efeitos de interação medem o grau de dependência entre os fatores. Existe interação entre dois ou mais fatores de um experimento se o efeito da variação de um fator depende dos níveis em que são considerados os outros fatores (MONTGOMERY, 1997). Dessa forma, a interação entre dois fatores *A* e *B* mede o erro cometido estimando-se o efeito principal apenas de *A*, como se esta fosse uma variável independente de *B* (BOX *et al*., 1978).

2.2. Experimentos fatoriais em dois níveis

Um caso particular do planejamento de experimentos fatoriais é aquele onde todos os fatores são considerados em apenas dois níveis, que podem indicar dois valores numéricos para fatores quantitativos ou duas possibilidades de escolha, para fatores qualitativos. Sendo n o número de fatores, o número de combinações ou condições experimentais será 2^n.

As definições utilizadas no planejamento de experimentos fatoriais em dois níveis são:

- n = número de fatores;
- r = número de réplicas para cada condição experimental;
- $m = 2^n$ = número de tratamentos ou condições experimentais;
- c = número do tratamento ou condição experimental;
- $N = r\,2^n$ = número total de observações;
- Y = variável de resposta ou de controle;
- T_c = total das r observações da *c-ésima* condição experimental ou tratamento;
- $\overline{Y}_{(c)} = \dfrac{T_{(c)}}{r}$ = média por tratamento ou condição experimental.

No planejamento de experimentos fatoriais em dois níveis, o efeito principal de um fator é definido como a diferença entre as respostas médias da variável de saída ou de controle para os dois níveis do fator considerado. Seja um experimento fatorial em dois níveis, inferior (-) e superior (+), com dois fatores, *A* e *B*. Considere-se a representação indicada na Tabela 1.

O efeito principal de *A*, E_A, é dado por:

$$E_A = \overline{Y}_A^{+} - \overline{Y}_A^{-}$$

$$E_A = \frac{1}{2}\left(-\overline{Y}_{11} - \overline{Y}_{12} + \overline{Y}_{21} + \overline{Y}_{22}\right) \qquad (1)$$

Tabela 1: Representação de um experimento fatorial em dois níveis com dois fatores

níveis		representação		reposta média
fator A	fator B	A	B	
inferior	inferior	-	-	$\overline{Y}_{11}$
superior	inferior	+	-	$\overline{Y}_{21}$
inferior	superior	-	+	$\overline{Y}_{12}$
superior	superior	+	+	$\overline{Y}_{22}$

O efeito principal de *B*, E_B, é dado por:

$$E_B = \overline{Y}_B^+ - \overline{Y}_B^-$$

$$E_B = \frac{1}{2}\left(-\overline{Y}_{11} + \overline{Y}_{12} - \overline{Y}_{21} + \overline{Y}_{22}\right) \quad (2)$$

Nas Equações 1 e 2 deve-se observar que $\overline{Y}_A^+$, $\overline{Y}_A^-$, $\overline{Y}_B^+$ e $\overline{Y}_B^-$ são as médias das variáveis de resposta para os níveis superior e inferior dos fatores *A* e *B*, respectivamente.

O efeito de interação entre dois fatores é definido como a metade da diferença entre os efeitos de um fator nos dois níveis do segundo fator, ou seja

$$E_{AB} = \frac{E_A^{B+} - E_A^{B-}}{2} \quad (3)$$

Onde

E_{AB} é o efeito de interação entre os fatores *A e B*

E_A^{B+} é o efeito do fator *A* mantendo-se o fator *B* em seu nível superior e

E_A^{B-} é o efeito do fator *A* mantendo-se o fator *B* em seu nível inferior.

Apenas a observação dos efeitos principais e dos efeitos de interação entre os fatores pode não ser conclusiva para se determinar se esses efeitos são ou não significativos. Um estudo mais rigoroso sobre a significância dos efeitos principais e de interação entre os fatores é fornecido pelo método de análise de variância (ANOVA).

O método ANOVA permite a verificação da hipótese nula em que o efeito sob consideração é significativo em termos do teste estatístico *F*. O propósito básico de um teste de significância é comparar uma estimativa do efeito de um tratamento ou amostra com a estimativa do erro aleatório. Considerando-se que o erro aleatório é desprezível, é possível através dessa comparação estabelecer se o efeito do tratamento em questão é ou não significativo (GARCIA-DIAZ & PHILLIPS, 1995).

A comparação das variâncias entre tratamentos é feita comparando-se valores de quadrados médios, admitindo-se uma hipótese inicial H_0 de que as médias dos tratamentos ou amostras são diferentes ($H_0 \neq \overline{Y_1} \neq \overline{Y_2} \neq \ldots \neq \overline{Y_m}$). O quadrado médio total (QM_{total}) representa a variância total dos dados, enquanto que os quadrados médios $QM_{tratamentos}$ e QM_{erro} representam estimativas das variâncias entre tratamentos e dentro de cada tratamento, respectivamente. Como o objetivo é comparar as variâncias entre tratamentos, o quadrado médio que representa a variação dentro do tratamento ou amostra é chamado de erro experimental. Se o quadrado médio entre tratamentos apresentar valor bem superior ao quadrado médio dentro dos tratamentos, a hipótese nula será confirmada.

Essa comparação pode ser feita através da "estatística *F*", determinada pela razão entre dois quadrados médios ou duas variâncias. O teste *F* de Snedecor baseia-se na comparação do valor de *F* calculado a partir dos resultados observados (Equação 4) com valores de *F* tabelados em função do nível de significância α e dos graus de liberdade das variâncias.

$$F_{m-1,N-m} = \frac{QM_{tratamentos}}{QM_{erro}} \tag{4}$$

Se o valor de F calculado for maior do que o valor tabelado, pode-se afirmar com uma confiança de $[(1 - a) ´ 100]\%$ que as médias são diferentes e portanto aceita-se a hipótese nula.

2.3. Experimentos fatoriais fracionários

A utilização da técnica de fracionamento de experimentos permite que as respostas para as questões investigadas sejam obtidas com a realização de apenas uma fração do experimento, explorando-se a redundância existente quando são considerados muitos fatores em um experimento. Essa redundância origina-se em efeitos desprezíveis, tanto principais como de interação entre os fatores.

Efeitos principais desprezíveis aparecem quando são introduzidos no experimento fatores que não possuem influência na variável de resposta. Por outro lado, observa-se que os efeitos de interação entre os fatores tendem a obedecer a uma certa hierarquia em termos de magnitude absoluta, sendo que os efeitos principais dos fatores geralmente apresentam valores maiores que os efeitos de interação entre dois fatores, que por sua vez tendem a apresentar valores superiores aos efeitos de interação entre três fatores, e assim sucessivamente (BOX *et al.*, 1978). Dessa forma, interações de alta ordem, por exemplo, interações entre quatro fatores, tendem a se tornar desprezíveis, podendo ser desconsideradas.

O planejamento fatorial fracionário baseia-se na exploração dessa redundância, fazendo uso do sistema de confundimento ("*confounding*") para diminuir o número de ensaios em um experimento. Nesse sistema os efeitos das variáveis de entrada ou fatores encontram-se acoplados, podendo-se realizar apenas uma fração do experimento, com base na consideração de que interações de alta ordem podem ser desconsideradas.

2.3.1. *Montagem de experimentos fatoriais fracionários em dois níveis*

A notação que representa experimentos fatoriais fracionários é w^{k-p}, sendo w o número de níveis dos fatores, k o número de fatores e p o expoente de fracionamento. Experimentos fracionários com fatores em dois níveis são designados por 2^{k-p}, sendo que a fração extraída do experimento fatorial é 2^{-p}.

Considere-se um experimento fatorial envolvendo k fatores, todos com dois níveis de variação. O experimento fatorial completo envolveria 2^k condições experimentais ou tratamentos e através da realização desse experimento poderiam ser determinados $2^k - 1$ efeitos, nos quais estariam incluídos efeitos de interação de alta ordem.

Optando-se por realizar um experimento fracionário, pode-se diminuir o número de condições experimentais a serem testadas para 2^{k-p}, correspondentes a uma fração de $1/2^p$ do experimento completo. Essa redução do experimento implica na conseqüente redução do número de efeitos que podem ser determinados, que passa a ser igual a $2^{(k-p)} - 1$. Devido ao fracionamento haverá a presença de acoplamento de efeitos principais com efeitos de interação entre fatores, e de efeitos de interação entre si (ACHCAR, 1995).

Um experimento fatorial fracionário é montado construindo-se um experimento fatorial completo para k-p fatores, ou seja, construindo-se um experimento 2^{k-p}, e posteriormente acoplando-se os efeitos principais dos *p* fatores não utilizados para montagem do experimento a alguns dos efeitos de interação entre os *k-p* fatores. Dessa forma cada um dos *p* fatores será adicionado ao experimento sem que ocorra aumento do número de condições experimentais a serem testadas, fazendo seus níveis coincidirem com uma das colunas de sinais representativas das interações entre os *k-p* fatores. Em decorrência do fracionamento, os efeitos das interações utilizadas para introdução dos *p* fatores estarão confundidos com os efeitos principais desses *p* fatores. O procedimento de fracionamento encontra-se exemplificado no item 3.

Os padrões de acoplamento são determinados pela relação definidora do experimento fatorial fracionário, que por sua vez é obtida a partir dos geradores e de suas multiplicações dois a dois, três a três e assim por diante, incluindo todas as combinações possíveis. As relações geradoras de um experimento fatorial fracionário 2^{k-p} são aquelas que associam os níveis das *p* variáveis às interações das *k-p* variáveis utilizadas para a montagem do experimento.

O grau de fracionamento de um experimento é representado pela sua resolução, sendo inversamente proporcional a essa, ou seja, quanto maior a resolução de um experimento menor é o grau de fracionamento e consequentemente menor é o acoplamento de efeitos. Em geral, a resolução de um experimento fracionário em dois níveis é igual ao comprimento da palavra mais curta da relação definidora (BOX *et al.*, 1978).

2.4. Experimentos fatoriais fracionários com fatores em níveis variados

Em algumas situações ocorre a necessidade de se introduzir em um experimento fatores que possuem mais do que dois níveis de variação. Isso acontece geralmente quando o experimento engloba fatores quantitativos e qualitativos, havendo a possibilidade dos fatores qualitativos possuírem três ou quatro níveis diferentes. Experimentos onde os fatores não ocorrem todos no mesmo nível são denominados experimentos fatoriais assimétricos (ADDELMAN, 1962).

Para que o planejamento e a análise de experimentos com fatores em níveis variados possam ser realizados com relativa simplicidade e funcionalidade, convém acomodar os fatores com mais de dois níveis de variação em planejamentos fatoriais em dois níveis 2^n. Com esse objetivo, utiliza-se o artifício de transformação de fatores com três ou quatro níveis em dois fatores com dois níveis de variação (MONTGOMERY, 1997).

3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE FRACIONAMENTO DE EXPERIMENTOS FATORIAIS COM FATORES EM NÍVEIS VARIADOS

Para ilustração da técnica de fracionamento de experimentos fatoriais com fatores em níveis variados considere-se como exemplo uma parte do estudo realizado por FABBRI (1994), referente à influência dos fatores tipo de solo segundo classificação MCT, tipo de solo segundo classificação HRB, pH da suspensão solo+água e diâmetro máximo da fração argila, no coeficiente de atividade do solo, que neste caso é a variável de controle ou de resposta, ou seja, é a variável dependente.

O coeficiente de atividade (CA) de uma fração granulométrica de um solo, abaixo de um determinado diâmetro arbitrado, foi definido por FABBRI (1994) como a razão entre o volume de azul de metileno consumido por 1 g de solo seco (Va) e a porcentagem que o solo contém da fração cujo coeficiente de atividade se deseja determinar. O volume de azul (Va) foi determinado através do ensaio de adsorção de azul de metileno pelo método da mancha.

O fator tipo de solo segundo classificação MCT foi considerado em quatro níveis, solo argiloso laterítico (LG´), solo argiloso não-laterítico (NG´), solo arenoso laterítico (LA´) e solo arenoso não-laterítico (NA’). O pH da suspensão solo+água utilizada no ensaio de adsorção de azul de metileno foi considerado em três níveis, ácido, normal e básico. Os fatores tipo de solo segundo classificação HRB e diâmetro máximo da fração argila variaram entre dois níveis. Segundo a classificação HRB os solos foram divididos em dois grupos, solos granulares, com 35% ou menos de material passando pela peneira n.°200, e solos finos, com mais de 35 % de material passando pela peneira n.°200, sendo que os últimos incluem siltes e argilas. O coeficiente de atividade foi determinado considerando-se dois diâmetros máximos para a fração argila, 0,005 mm e 0,002 mm. Um resumo dos fatores com seus respectivos níveis de variação encontra-se apresentado na Tabela 2.

Tabela 2: Variáveis independentes ou fatores do experimento fatorial fracionário

fatores	designação dos fatores	níveis dos fatores
tipo de solo segundo classificação MCT	A ($X1 + X2$)	4
pH da suspensão solo+água	B ($X3 + X4$)	3
diâmetro máximo da fração argila	$X5$	2
tipo de solo segundo classificação HRB	$X6$	2

O experimento fatorial completo envolveria $4 \times 3 \times 2 \times 2$, ou seja, 48 condições experimentais. Fracionando-se o experimento em ½ o número de condições experimentais reduz-se à 24. Como o experimento inclui fatores em níveis variados, utilizou-se o artifício de transformação dos fatores com três e quatro níveis de variação em dois fatores de dois níveis, seguindo-se a associação de níveis apresentada na Tabela 3.

Tabela 3: Transformação dos fatores A e B, com quatro e três níveis de variação, em dois fatores de dois níveis, $X1$ e $X2$, e $X3$ e $X4$, respectivamente.

fatores em dois níveis		fator em quatro níveis	fatores em dois níveis		fator em três níveis
$X1$	$X2$	A	$X3$	$X4$	B
-	-	nível 0	-	-	nível 0
+	-	nível 1	+	-	nível 1
-	+	nível 2	-	+	nível 1
+	+	nível 3	+	+	nível 2

Assim, o experimento fatorial assimétrico $4 \times 3 \times 2 \times 2$ foi acomodado em um experimento fatorial em dois níveis 2^6, que apresenta como vantagem maior simplicidade de planejamento e análise. O número total de efeitos que podem ser determinados através da realização desse experimento é $2^6 - 1 = 63$ efeitos, incluindo 6 efeitos principais, 15 efeitos de interação entre dois fatores, 20 efeitos de interação entre três fatores, 15 efeitos de interação entre quatro fatores, 6 efeitos de interação entre cinco fatores e 1 efeito de interação entre os seis fatores considerados.

O arranjo do planejamento fatorial completo 2^6 encontra-se parcialmente apresentado na Tabela 4, na qual podem ser observadas as colunas de sinais correspondentes aos efeitos principais dos fatores e, a título de exemplificação, as colunas de sinais correspondentes aos efeitos de interação entre os pares de fatores *X5 X6*, *A X5* e *B X6*. Os demais efeitos não foram apresentados em virtude da limitação de espaço disponível. Pelo mesmo motivo foram omitidas as linhas da Tabela 4 correspondentes às condições experimentais *17* a *48*. Entretanto, a partir do arranjo experimental parcialmente apresentado pode-se inferir o arranjo total do experimento. Por facilidade de representação utilizou-se na Tabela 4 a notação *12* para indicar o efeito de interação entre os fatores *X1* e *X2*, *34* para indicar o efeito de interação entre os fatores *X3* e *X4*, e assim sucessivamente.

Observando-se a Tabela 4 pode-se notar que em virtude do artifício de transformação das variáveis de três e quatro níveis em duas variáveis de dois níveis, o número de linhas representativas das condições experimentais aumentou de 48 para 64. Entretanto as 16 linhas acrescentadas ao arranjo do experimento na verdade são réplicas. Dessa forma, o número de condições experimentais que efetivamente serão testadas em laboratório continua sendo 48. As réplicas foram acrescentadas ao arranjo do experimento apenas com finalidade de simplificação das análises dos resultados.

As linhas que se encontram replicadas são *5* e *9*; *6* e *10*; *7* e *11*; *8* e *12*; *21* e *25*; *22* e *26*; *23* e *27*; *24* e *28; 37* e *41*; *38* e *42*; *39* e *43*; *40* e *44*; *53* e *57*; *54* e *58*; *55* e *59; 56* e *60*. Algumas delas podem ser observadas na Tabela 4, destacadas por asteriscos. As linhas replicadas deverão ser utilizadas apenas para cálculo dos efeitos relacionados ao fator *B*, pois representam as condições experimentais para as quais tal fator encontra-se em seu nível intermediário (nível 1). Os efeitos principais dos fatores em dois e quatro níveis e os efeitos de interação entre tais fatores deverão ser calculados com as linhas *1* a *4*, *13* a *20*, *29* a *36*, *45* a *52* e *61* a *64*, que representam as condições experimentais para as quais o fator *B* encontra-se em seus níveis mais baixo (nível 0) e mais alto (nível 2).

Para a realização do fracionamento do experimento, inicialmente construiu-se um experimento fatorial completo para 2^{6-1} fatores. Em seguida introduziu-se o sexto fator, fazendo seus níveis coincidirem com os níveis da coluna de interação entre os fatores *X1*, *X2*, *X3*, *X4* e *X5*, designada por *X1X2X3X4X5*. Parte do arranjo do experimento fatorial fracionário 2^{6-1} encontra-se apresentada na Tabela 5, na qual encontram-se destacadas por asteriscos as condições experimentais replicadas. Nessa tabela, assim como na Tabela 4, foram apresentadas apenas algumas interações, em virtude da limitação de espaço disponível.

A utilização de experimentos fatoriais fracionários diminui o número de condições experimentais a serem testadas mas em contrapartida o número de efeitos que podem ser avaliados também diminui. Isso ocorre devido ao acoplamento de efeitos existente em experimentos fatoriais fracionários. Como exemplo pode-se observar que as colunas *125* e *346* da Tabela 5 são idênticas, resultado do "confundimento" ou acoplamento dos efeitos de interação entre os fatores *X1 X2 X5* e *X3 X4 X6*. As interações *125* e *346* são denominadas sinônimos.

Tabela 4: Representação parcial do arranjo do planejamento fatorial completo 2^6

	fatores						algumas interações entre fatores									réplicas		
cond.	A		B							A X5			B X6			ou observações		$\overline{Y}_{(c)}$
exp.	X1	X2	X3	X4	X5	X6	12	34	56	15	25	125	36	46	346	Y1	Y2	
1	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	+	+	-	3,29	6,40	4,85
2	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	+	+	+	+	-	17,77	10,88	14,33
3	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	+	+	+	-	3,99	3,38	3,69
4	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	11,25	6,96	9,11
* 5	-	-	+	-	-	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+	6,58	11,51	9,05
* 6	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-	+	+	-	+	+	31,09	19,58	25,34
* 7	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	+	-	+	+	7,98	6,77	7,38
* 8	+	+	+	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	18,75	13,92	16,34
* 9	-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	+	-	+	-	+	6,58	11,51	9,05
* 10	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	+	+	+	-	+	31,09	19,58	25,34
* 11	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	+	7,98	6,77	7,38
* 12	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	18,75	13,92	16,34
13	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	25,24	23,03	24,14
14	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	65,14	30,46	47,80
15	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	17,30	13,53	15,42
16	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	26,25	20,88	23,57
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
49	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+	4,80	5,60	5,20
50	+	-	-	-	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	8,08	13,21	10,65
51	-	+	-	-	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	3,44	3,97	3,71
52	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	10,28	13,39	11,84
* 53	-	-	+	-	+	+	+	-	+	-	-	+	+	-	-	9,60	11,21	10,41
* 54	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	14,55	22,46	18,51
* 55	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	+	-	-	5,50	7,94	6,72
* 56	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	18,00	26,78	22,39
* 57	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	9,60	11,21	10,41
* 58	+	-	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	14,55	22,46	18,51
* 59	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	5,50	7,94	6,72
* 60	+	+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	+	-	18,00	26,78	22,39
61	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	17,61	20,82	19,22
62	+	-	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	+	32,33	44,92	38,63
63	-	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	+	+	12,37	17,47	14,92
64	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	30,85	46,86	38,86

A relação geradora do experimento fatorial fracionado em ½ é

$$X6 = X1X2X3X4X5 \tag{5}$$

Multiplicando-se ambos os lados da Equação 5 pela coluna de sinais da variável *X6*, obtém-se

$$X6 \times X6 = X1X2X3X4X5X6 \tag{6}$$

$$X6^2 = X1X2X3X4X5X6 \tag{7}$$

Como a multiplicação de colunas com elementos idênticos fornece uma coluna de sinais positivos, designada por *I*, o padrão de acoplamento resulta em

$$I = X1X2X3X4X5X6 \tag{8}$$

A relação expressa pela Equação 8 é denominada relação geradora do experimento. A combinação *X1X2X3X4X5X6* é referida como "palavra". Experimentos fracionados em ½ possuem apenas um gerador e consequentemente a relação definidora do experimento confunde-se com a relação geradora. Em geral um experimento 2^{k-p} é produzido por *p* geradores e possui uma relação definidora com $2^p - 1$ palavras.

A relação definidora, que inclui os geradores e todas as outras palavras que podem ser obtidas multiplicando-se os geradores entre si, constitui a base de determinação dos padrões de acoplamento ou padrões de sobreposição. A regra prática consiste em multiplicar-se ambos os membros da relação definidora pela coluna do efeito cujos padrões de acoplamento se desejam determinar. Ou seja, para se encontrar os padrões de acoplamento de determinado efeito, todas as palavras da relação definidora devem ser multiplicadas pelo referido efeito.

Tabela 5: Representação parcial do arranjo do planejamento fatorial fracionário 2^{6-1}

	fatores															réplicas ou observações		$\overline{Y}_{(c)}$
cond.	A		B							A X5			B X6					
exp.	X1	X2	X3	X4	X5	X6	12	34	56	15	25	125	36	46	346	Y1	Y2	
1	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	+	+	-	3,29	6,40	4,85
34	+	-	-	-	-	+	-	+	-	-	+	+	-	-	+	7,46	11,89	9,68
35	-	+	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	3,20	3,43	3,32
4	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	+	-	11,25	6,96	9,11
* *37*	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	*8,48*	*8,89*	*8,69*
* *6*	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-	+	+	-	+	+	*31,09*	*19,58*	*25,34*
* *7*	-	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	+	-	+	+	*7,98*	*6,77*	*7,38*
* *40*	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	*14,13*	*18,74*	*16,44*
* *41*	-	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	*8,48*	*8,89*	*8,69*
* *10*	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	+	+	+	-	+	*31,09*	*19,58*	*25,34*
* *11*	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	+	*7,98*	*6,77*	*7,38*
* *44*	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	*14,13*	*18,74*	*16,44*
13	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	25,24	23,03	24,14
46	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	+	+	29,84	40,43	35,14
47	-	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	11,52	15,09	13,31
16	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	26,25	20,88	23,57
49	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+	4,80	5,60	5,20
18	+	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	+	-	20,80	14,84	17,82
19	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+	-	4,20	3,38	3,79
52	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	10,28	13,39	11,84
* *21*	-	-	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	-	+	+	*6,83*	*13,24*	*10,04*
* *54*	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	*14,55*	*22,46*	*18,51*
* *55*	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	+	-	-	*5,50*	*7,94*	*6,72*
* *24*	+	+	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	+	*34,36*	*20,88*	*27,62*
* *25*	-	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	*6,83*	*13,24*	*10,04*
* *58*	+	-	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	*14,55*	*22,46*	*18,51*
* *59*	-	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	*5,50*	*7,94*	*6,72*
* *28*	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+	+	-	+	*34,36*	*20,88*	*27,62*
61	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	17,61	20,82	19,22
30	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	76,27	41,54	58,91
31	-	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	18,21	13,53	15,87
64	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	30,85	46,86	38,86

No exemplo, a relação definidora é $I = X1X2X3X4X5X6$. Multiplicando-se ambos os membros dessa relação por $X5$ obtém-se $X5 = X1X2X3X4X5^2X6$, ou seja, $X5 = X1X2X3X4X6$, o que significa que o efeito de *X5* confunde-se com o efeito da interação entre os fatores *X1X2X3X4X6*. De forma semelhante podem ser obtidos os demais padrões de acoplamento.

Caso se tratasse de um experimento em dois níveis, com relação definidora *I* = *X1X2X3X4X5X6*, este possuiria resolução *VI*, o que significaria que o efeito principal dos fatores seria confundido com o efeito de interação entre cinco fatores, o efeito de interação entre dois fatores seria confundido com o efeito de interação entre quatro fatores e assim sucessivamente. Entretanto, o experimento $4\times3\times2\times2$ em questão, com relação definidora *I* = *ABX5X6*, possui resolução *IV*, com efeitos principais confundindo-se com efeitos de interação entre três fatores e efeitos de interação entre dois fatores confundindo-se entre si.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resumos das análises de variância realizadas para os experimentos completo e fracionário são apresentados nas Tabelas 6 e 7, respectivamente, onde para cada fator e interação entre fatores podem ser encontrados o grau de liberdade, a soma de quadrados, o quadrado médio, o valor de *F* calculado (F_0), o valor de *F* tabelado para nível de significância $a = 0{,}01$ ($F_{0,01}$) e uma comparação entre os dois valores de *F*. Se o valor de *F* calculado for maior que o valor tabelado, pode-se afirmar com uma confiança de *99%* que o efeito em questão é significativo.

Tabela 6: Análise de variância do planejamento fatorial completo

fonte de variação	graus de liberdade (GL)		soma de quadrados (SQ)	quadrado médio (QM = SQ/GL)	F_0	$F_{0.01}$	significante ?
A	3	SQ A =	3816,82	1272,27	15,51	4,24	sim
B	2	SQ B =	6932,70	3466,35	42,25	5,10	sim
X5	1	SQ X5 =	259,49	259,49	3,16	7,22	não
X6	1	SQ X6 =	257,48	257,48	3,14	7,22	não
AX5	3	SQ AX5 =	169,01	56,34	0,69	4,24	não
AX6	3	SQ AX6 =	309,98	103,33	1,26	4,24	não
BX5	2	SQ BX5 =	68,07	34,03	0,41	5,10	não
BX6	2	SQ BX6 =	57,85	28,92	0,35	5,10	não
AB	6	SQ AB =	1039,62	173,27	2,11	3,22	não
ABX5	6	SQ ABX5 =	35,99	6,00	0,07	3,22	não
ABX6	6	SQ ABX6 =	170,15	28,36	0,35	3,22	não
X5X6	1	SQ X5X6 =	17,01	17,01	0,21	7,22	não
AX5X6	3	SQ AX5X6 =	30,40	10,13	0,12	4,24	não
BX5X6	2	SQ BX5X6 =	2,30	1,15	0,01	5,10	não
erro	N-m (48*2) - 48 = 48	SQerro =	3937,90	82,04			
variação total	N-1 (48*2) - 1 = 95	SQtotal =	17111,27	180,12			

A determinação da soma dos quadrados do fator *A* foi realizada adicionando-se as somas dos quadrados de *X1*, *X2* e *X1X2*. No caso da soma dos quadrados da interação entre os fatores *A* e *X5*, adicionaram-se as somas dos quadrados de *X1X5*, *X2X5* e *X1X2X5*. As demais somas de quadrados foram obtidas de forma semelhante.

Para melhor visualização dos dados, os resultados fornecidos pelos experimentos completo e fracionário foram resumidos na Tabela 8, na qual encontram-se também os efeitos principais e de interação entre os fatores.

Através da realização do experimento completo foram considerados significativos para determinação do coeficiente de atividade dos solos os efeitos dos fatores tipo de solo segundo classificação MCT (fator *A*) e pH da suspensão solo+água (fator *B*). Os mesmos resultados foram obtidos realizando-se o experimento fracionado em ½

Tabela 7: Análise de variância do planejamento fatorial fracionado em ½

graus de liberdade (GL)		soma de quadrados (SQ)	quadrado médio (QM = SQ/GL)	F_0	$F_{0,01}$	significante ?
3	SQ A =	2097,02	699,01	10,88	4,72	sim
2	SQ B =	3514,00	1757,00	27,36	5,61	sim
1	SQ X5 =	292,94	292,94	4,56	7,82	não
3	SQ AX5 =	278,80	92,93	1,45	4,72	não
2	SQ BX5 =	169,85	84,93	1,32	5,61	não
6	SQ AB =	727,13	121,19	1,89	3,67	não
6	SQ ABX5 =	410,20	68,37	1,06	3,67	não
N-m (24*2) - 24 = 24	SQerro =	1541,37	64,22			
N-1 (24*2) - 1 = 47	SQtotal =	9031,32	192,16			

Tabela 8: Comparação dos resultados fornecidos pelos experimentos completo e fracionário

fatores e interações	experimento fatorial completo: efeito	F_0	$F_{0,01}$	significante?	experimento fracionado em 1/2: efeito	F_0	$F_{0,01}$	significante?
A	7,19	15,51	4,24	sim	4,86	10,88	4,72	sim
B	23,61	42,25	5,10	sim	23,75	27,36	5,61	sim
X5	4,03	3,16	7,22	não	6,05	4,56	7,82	não
X6	-4,01	3,14	7,22	não	-2,69	0,90	7,82	não
A B	-0,96	2,11	3,22	não	-4,91	1,89	3,67	não
A X5	4,98	0,69	4,24	não	6,44	1,45	4,72	não
A X6	4,01	1,26	4,24	não	2,76	1,58	4,72	não
B X5	2,25	0,41	5,10	não	5,52	1,32	5,61	não
B X6	-2,08	0,35	5,10	não	-0,15	0,27	5,61	não
X5 X6	-1,03	0,21	7,22	não	-2,63	0,86	7,82	não
A B X5	2,18	0,07	3,22	não	0,83	1,06	3,67	não
A B X6	5,40	0,35	3,22	não	18,92	1,96	3,67	não
A X5 X6	-1,25	0,12	4,24	não	0,73	1,63	4,72	não
B X5 X6	-0,35	0,01	5,10	não	-4,36	0,62	5,61	não

Observando-se os dados apresentados, pode-se notar que o diâmetro máximo da fração argila considerada (fator *X5*) não interferiu significativamente no cálculo do coeficiente de atividade, para os solos utilizados no exemplo em questão. Isso porque esses solos não possuem quantidades significativas de material com diâmetro entre 0,002 mm e 0,005 mm. Dessa forma, a porcentagem de material com diâmetro menor que 0,005 mm é bastante próxima da porcentagem de material com diâmetro menor que 0,002 mm, resultando em coeficientes de atividade semelhantes para ambas as frações consideradas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Técnicas de planejamento e análise de experimentos fatoriais fracionários com fatores em níveis variados foram introduzidas e exemplificadas através da apresentação dos resultados de um experimento realizado completo e fracionado em ½ Desconsiderando-se efeitos de interação de alta ordem, mostrou-se que através da realização do experimento fracionado em ½ seriam obtidas as mesmas conclusões que foram obtidas realizando-se o experimento completo, com a vantagem de serem testadas em laboratório apenas 24 condições experimentais, ao invés das 48 condições necessárias para a realização do experimento completo.

Com isso ficaram demonstrados os benefícios do fracionamento de experimentos, consideradas as ressalvas relativas à diminuição do número de efeitos independentes que podem ser determinados, em virtude do acoplamento de efeitos em que se baseia o fracionamento.

Embora interações de alta ordem tendam a se tornar desprezíveis, não interferindo nas conclusões obtidas através da análise dos dados fornecidos pelo experimento fracionado, pode-se optar pela introdução de frações complementares, caso permaneçam dúvidas relativas ao acoplamento de efeitos (BOX *et al*., 1978).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACHCAR, J.A. (1995) *Planejamento de Experimentos em Engenharia e Indústria*. ICMSC-USP, São Carlos.

ADDELMAN, S. (1962) "Ortogonal Main Effect Plans for Asymmetric Factorial Experiments". *Technometrics*. v.4, n.1, p.21-46.

BOX, G.E.P.; W. G. HUNTER e J. S. HUNTER (1978) *Statistics for Experimenters*. John Wiley & Sons. New York.

CARPINETTI, L.C.R. (2000) *Planejamento e Análise de Experimentos*. EESC-USP. São Carlos.

FABBRI, G.T.P. (1994) *Caracterização da Fração Fina de Solos Tropicais através da Adsorção de Azul de Metileno*. São Carlos. 101p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

GARCIA-DIAZ, A. e D.T. PHILLIPS (1995) *Principles of Experimental Design and Analysis*. Chapman & Hall. London.

MONTGOMERY, D.C. (1997) *Design and Analysis of Experiments*. 4.ed., John Wiley & Sons, Inc. New York.

Endereço dos autores
Escola de Engenharia de São Carlos – USP
Departamento de Transportes – STT
Av. Trabalhador Sancarlense, 400, Centro – Cep 13566-590 – São Carlos – SP
e-mail:glauco@sc.usp.br
santanna@sc.usp.br